国家"八五"重点
图书规划项目

吴文俊 主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI





中国数学史大系

第一卷 上古到西汉

国家“八五”重点图书规划项目

中国数学史大系

吴文俊 主编

第一卷 上古到西汉

本卷主编 李迪

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

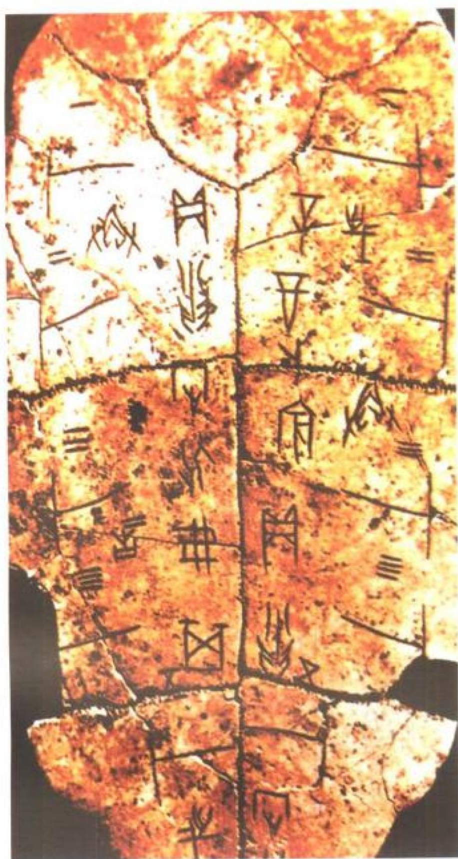
中国数学史大系　第1卷/吴文俊主编;李迪分主编.—北京:北京师范大学出版社,1998.9

ISBN 7-303-04555-4

Ⅰ.中…　Ⅱ.①吴…②李…　Ⅲ.数学史-中国　Ⅳ.O112

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第23320号

北京师范大学出版社出版发行
(100875　北京新街口外大街19号)
出版人:谢维和
北京东晓印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:15.75　字数:325千字
1998年9月北京第1版　1998年9月北京第1次印刷
印数:1～5 000
定价:45.00元



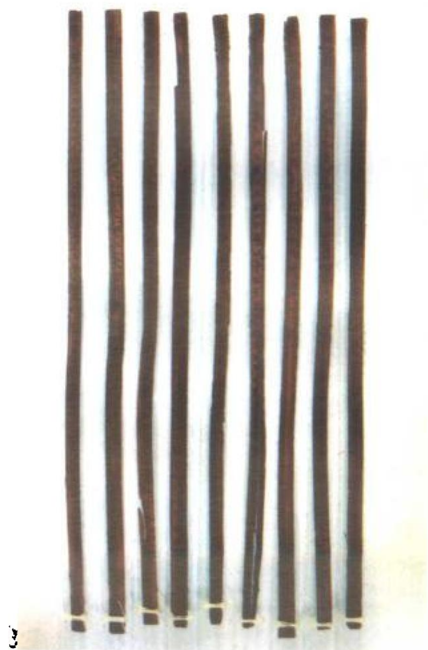
甲骨文，其上上下左右两侧有数目字一、二、三、四、五
（采自《中国大百科全书·数学卷》）



陕西旬阳出土西汉象牙算筹



湖北江陵张家山西汉墓
出土《算数书》发掘现场



竹简《算数书》(西汉初)
(采自《中国大百科
全书 · 数学卷》)



前排左起：李继闵、白尚恕、李迪
后排左起：沈康身、吴文俊



1982 年 8 月摄于比利时，左起：
李迪、鲁桂珍、李约瑟（英国）、白尚恕



1988 年 8 月摄于美国加利福尼亚大学（圣地亚哥）
前排左起：梅荣照、马若安（法国）、李迪、杜石然、沈康身、洪万生
后排左起：罗见今、戴念祖、李兆华、刘钝、李国伟、王渝生、傅大为

序

1984 年间，四位中国数学史的专家教授，倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作，取名为《中国数学史大系》，这四位教授（以年事为序）是：

北京师范大学的白尚恕教授；

杭州大学的沈康身教授；

内蒙古师范大学的李迪教授；

西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长，有其自身特有的思想体系与发展途径，从远古以至宋元，在很长一段时间内成为世界数学发展的主流，但自明代以来，由于政治社会等种种原因，特别如明末徐光启所指出的那样，一方面"名理之儒，土苴天下之实事"，另方面"妖妄之术，谬言数有神理"，致使中国传统数学濒于灭绝，以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断，虽然康乾之世曾有一度重视，但仅止于发掘阐释古籍而已，循至 20 世纪中叶，李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍，使中国古算得以不绝如缕。到 70 年代特别是改革开放以来，全国兴起了研习中国传统数学的高潮，论著迭出，仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著，就在 10 种以上，其它方面论著之多，更难以统计，这些研究使中国传统数学的固有特色，如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的 Wagner 先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于 1993 年因病逝世，白尚恕教授也于 1995 年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作,以及北师大出版社的高度热情.第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代,终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际.聊志数语,以示庆贺。

吴文俊

1997.12.25

全书编写要求与方法

《中国数学史大系》是一部多卷本中国数学史学术专著，总字数预计四百万字左右。为什么要编写这么大一部中国数学史呢？目的、要求和写法等，必须向读者作一较详细的陈述。

一、编写的目的和意义。为了叙述上的方便，我们把目的和意义放在一起说明。

1. 客观需要这种书。有关中国数学史著作，国内外出版的有二十余种，其中有些是专题性的，如数学家传记、某一数学专题史等等。还有大批学术论文。但是这些论著，除少数问题外大都不够详细，一些需要者查找中国数学史上的什么资料，往往是大失所望。查找原始资料更加困难，除了几个大城市的图书馆和少数中国科学史研究中心外，百分之九十以上是找不到的。在中小城市里，连找一本赫赫有名的《九章算术》和李俨的《中算史论丛》都不太容易。这种情况就要求我们数学史工作者来解决这个问题，撰写一部大型中国数学史的任务就摆在了我们的面前。

2. 撰写这种书是可能的。但是撰写一部几百万字的书殊非易事，难度和难处是相当多的。实际上，做任何一件事只要是前人未做过的就都存在一个"难"字，事业就是在克服困难中取得进步的，困难都克服了，一件工作也就差不多完成了。我们的工作便是在这种心情下开始的，并且分析了完成这一工作的可能性与可行性。可能性有三：首先，中国数学史料极其丰富，光是历代数学著作就有二千种以上，约有半数流传至今，这是我们可能写出大型中国数学史著作的先决条件和基础，没有这个基础是不会产生撰写大型中国数学史著作的奢望的。其次，近年来在中国数

学史研究方面进展较快，每年都有一批水平较高的成果发表，以前研究得较少的薄弱历史阶段，如清代数学史近来有了显著进步，发掘出不少有较高水平的成就，又如少数民族数学也有不少研究。这对于我们的工作大有帮助，如果都需要自己现研究现编写，将要拖很长时间。但是还有些薄弱的环节，甚至接近于空白的问题也还存在，这就只好自己动手了。最后，我们有这种胆量敢于做这件事，一个可能是有一批人，其中有老专家和著名数学家，有三四十岁的中青年数学史工作者，还有一批更年轻的研究生，人员结构合理。正因为有这样一支队伍，使得这项工作不仅可能而且是可行的。

3. 给各方面提供有用的资料。我们的这一工作，在主观上是想满足各方面的需要，提供有参考价值的资料，如数学工作者、科学史工作者、历史工作者、哲学工作者和自然辩证法工作者等等，都可以从本书查到有关资料。我们也自认为，本书不仅能向读者提供较详细的一般资料，而且能够得到在他处不易得到的稀有资料和珍贵资料，例如在我们的书中包括一些从未发表过或未报导过的最新资料（其中有一批图像最为珍贵）。为了满足各方面的需要，本书在资料的使用方面范围较宽，除了大量的数学成果外，还包括一定的历史背景材料、数学教育、数学思想和数学家传记，以及中外数学交流的内容等等，同时对重要数学著作的版本、流传、学术团体、学术刊物等也都予以相当的注意。当然，在资料的使用上，我们也有选择，而不是不分主次，不分有用无用，不分好坏，一概录用，而是在浩如烟海的各种资料中挑选出一部分收入书中。因此，在资料上并不是包罗一切的，再加上我们的见闻有限，一些有用的资料可能被遗漏。

4. 给读者提一些值得深思的问题。数万年的中国数学发展史，不仅给我们留下大批有价值的史料，同时还给我们留下一大堆问题。这些问题，具有和史料同等的重要性。这里我们不妨列

举一些，如中国数学与西方数学相比较有哪些优点，哪些缺点？中国数学具有哪些特点？中国数学曾经有过繁荣时期，而且持续的时间较长，后来为什么落后于西方，甚至也落后于东邻日本？中国传统数学在世界数学史上占什么地位，产生过什么影响？现在还有影响吗？中国人到底取得了多少项领先于世界的数学成果？……这都是些值得深思的重大问题，其中包括使我们感到鼓舞的问题，也有使我们迷惑不解的问题，或其他类型的问题。不论是何种问题对国内外学术界都有研究价值，有经验教训供给人们考虑。在我们的书中，将努力尝试对这些问题给出回答，这是必须要这样做的。一部几百万字的多卷本中国数学史著作，不正面回答一些重大问题，不好向读者交待。但是我们的回答只代表我们的观点，绝不是定论，因此我们也希望和大家一道探讨中国数学史上的这些问题，以便更好地为当前科学政策的制订提供借鉴。

5. 对中国数学史的进一步研究提供一些方便。我们的这部著作，部头较大，只是对到现在为止的中国数学史工作做一次小结，而不是工作的结束。实际上，我们是看作下一阶段工作的开始。为此我们准备在本书中给今后的研究工作尽可能多的提供方便。例如我们将向人们提供较多的重要原始资料，两个副卷分别将外国有关资料和中国数学著作目录都编辑成册提供给读者。我们的目的是希望将来的研究者能在此书的基础上顺利开展工作。

6. 希望能起更多的作用。我们这套书不是专为专家、学者写的，我们也希望有关的教师、学生或其他人士从中得到某种好处，对他们的工作和学习有所裨益。由于每个人的情况不同，有不同的需要，所得好处也各异。例如有人可以从中获得方法论上的启发，有人则受到了爱国主义思想教育，还有人学习了历史上数学家的成就和刻苦钻研精神而受到鼓舞，教师能够从书中找到教学上所需要的资料，等等。如果真是这样，那么我们也就心满意足了。

7. 促进国际学术交流。近年来有越来越多的外国学者和旅居外国的华人对中国数学史发生兴趣，并且开展这方面的研究工作，不断发表研究成果。在我们同他们的交往中，他们经常提出希望中国学者多出版一些数学史著作供他们参考，像我们这样的大型著作正适合他们的要求。还有些外国学者很想了解中国数学发展史和数学成就，苦于缺少资料，也有的学者由于对中国数学史缺乏了解而误下断语，等等。为了促进国际学术交流，是我们撰写本书的目的之一。

二、本书的编写要求。根据编写本书的目的和学术著作应遵循的原则，我们给本书的编写规定了一些要求。我们要按照这些要求进行撰写。

1. 要尽可能详细。根据前述的目的，这部书必须足够详细才能满足各方面的需求。我们之所以要写这么大部头，也正是为了要做到详细这一步，在其他中国数学史中找不到的东西或虽找到而只是一笔带过的内容，在我们的书中不仅能找到，而且可能有相当详细的叙述。

2. 要揭示历史本来面目。中国数学的发展历史有其自身的面目，它的发生、发展都是客观存在的，要求中国数学史研究者，要尽可能的把这种真实情况揭示出来。例如历史上的计算工具、方法和现在完全不同，早期怎样计算还不十分清楚，可是大约从春秋战国时起一直到元代主要是用算筹进行计算，因此在我们的书中必须注意这个问题，除了在第一卷第三编第四章专门讲述算筹外，还要在其他部分注意使用算筹计算（在书中用一些符号代表算筹，而不可能把真的算筹摆在书上）。还要尽量保持前人的数学思想，不能把古人给“现代化”。就是说，不能把我们这些编者、作者的思想、观点强加给历史。但是做为一部中国数学史著作，要想不掺杂作者的思想、观点是不可能的，而且作者也必须明确地亮出自己的观点。这是很大的矛盾，解决这个矛盾的唯一办法是

史论分离的原则。

3. 要运用正确的观点。既然写书必须有思想、观点，作者就应当选择正确的观点做为写书的指导。所谓正确观点，我们是指那些能阐述真实历史发展情况的哲学观点，把这些观点做为贯穿全书的思想武器，这就是辩证唯物主义和历史唯物主义。我们必须有效地利用这种武器解释和解决中国数学发展中的一些根本问题，如数学的起源、数学发展的动力、数学的本质、杰出数学家的作用等等。如果一部几百万字的中国数学史著作只是罗列大批史料（这是绝对必要的，前已述及）是不够的，对于这些问题必须给出确切的解释。但是我们的书不是中国数学思想史，更不是哲学史，因此我们在处理上不设专章专节，而是结合具体数学史实有意识地这样做罢了。在我们的书中，不可避免的要对历史上的一些错误数学思想、观点进行必要的分析批判。不可讳言，中国历史上有些数学思想是不正确的，甚至是糟粕，本书不能采取回避的态度，也不能摆到书里不管。我们的分析批判要实事求是，充分说理，给出尽可能公正的评论。

4. 注意历史背景。中国数学的发生、发展是在中国这个特殊环境里进行的，因此中国数学史与中国的政治社会史紧密相联，离开中国具体历史背景的中国数学史是不存在的。有鉴于此，我们的这部著作将有意识地把历史背景资料引入书中，与数学的发展相结合，说明中国数学是扎根在中国这块土地上的，只有这样才能更好地理解和说明中国数学发展中的有关问题。这件事讲起来很容易，做起来困难重重，主要是往往缺乏联结历史背景与数学间的“中介性”资料，特别是第一手的、确切无疑的资料尤为难找。我们将努力做到这一点。

5. 加强中外比较。中国数学史一方面是中国人在中国“写”成的，另一方面它又不孤立于世界，而是和其他国家的数学并行发展，还互相影响。我们这部书充分注意了这种情况，加强了中

外对比。我们的比较不仅从微观上考虑具体数学成果的取得孰先孰后的问题，而且同时注意宏观的比较，例如中外数学的异同，总体上孰优孰劣的问题等。在比较中我们敢于承认自己不足或落后的事实，不能只说好的，领先的项目，而故意回避那些不足或落后的东西。我们是以实事求是的态度处理这个问题，是什么就说什么，既不夸大自己的成就，也不贬低别人的贡献。只有这样的比较才能对中国数学有更清楚、更正确的认识和估价。

6. **引文要注明出处**。做为一部学术专著的《中国数学史大系》要使用大量的原始资料和近人的研究成果，除了那些人们早已公认的事实而我们又没有新看法的问题外，大多数都要注明出处，告诉读者资料的来源。对于他人的研究成果，我们也是持严肃态度，公平对待。

三、本书的写法。这样多卷本的中国数学史著作，在写法上必须认真对待。写法包括两方面的内容，一是关于书本身的各种具体安排和一些技术性问题；一是关于编写人员的组织和稿件的处理问题。

1. **按时间顺序分卷**。关于科学史书的写法，目前所见到的大致有两种，一种是按时间顺序划分篇、章；一种是分成若干专题，每一专题又都按时间顺序排列，所有的专题都是平行的。这两种安排各有优缺点，我们认为前者的优点更多些，因此我们决定按时间顺序安排卷次，就是各卷以时间先后次序划分。这样全书的正卷可以说是以时间为一条线把中国数学串起来，呈现出明显的历史性。我们这样安排，和中国数学史的分期没有直接关系，如果能做到这一点，最理想不过了。实际上是很难的，因为按照我们的分期（第一卷第一编第三章），有些卷实在不好安排，所以只好不按分期处理。

2. **收入一批图片、照片**。图片和照片是一部中国数学史著作的重要组成部分，尤其像这样的多卷本书，图片、照片更不可缺

少。就是在写法上注意图文并茂，通过文字和图形向读者提供所需要的资料。我们自认为有些图形资料是一般不易找到的珍品，有的还是在本书中第一次刊出的。

3. **年代以中国纪年为主，公历纪元为辅**。在书中不可避免地要用到大量的具体年代，我们采用某些类似著作的办法，就是以中国纪年为主，用中文数字记年代数，下加圆括弧，括弧内用阿拉伯数码写上相应的公元年代，例如“元丰七年（1084）”。附带说一下，书中每个人名在每卷第一次出现时也要加上生死年代，例如“李冶（1192～1279）”。

4. **采用底注**。前面已经讲过，做为学术专著必须注明引文的出处和参考文献。加注的方法有多种，我们认为最方便的是底注，因此我们便采用这种方法。如果同一文献在同一卷中引用两次或两次以上，从第二次开始采取简化写法，如只写书名和所在页数。

5. **编写程序**。由副主编轮流担任执行主编或请另外专家担任主编，分头负责各卷的编写任务。每卷首先由各该卷主编拟出框架，即编、章的具体划分和安排，甚至可根据具体情况规定大概字数，也可能有一些简短说明。经过讨论和修改后的编写框架做为初步动手撰写的依据。这时由各卷主编进行“组阁”，即安排各编、章的执笔人。执笔人写出初稿后交自己的主编初审，如果初审认为不合乎要求，退回执笔人修改或重写，也可以改换执笔人。在初审通过的基础上，有关主编进行统稿、加工。然后由全书的主编、副主编会审，再经过修改加工成定稿，交出版社。

四、全书的卷次划分。原来全书正卷分五卷，12 分册，还有附卷四卷 4 册，共 16 册。后来认为设分册不方便，附卷过多，于是在 1996 年 10 月的审稿会上进行了较大调整，改为正卷八卷，不分册，附卷改称副卷，设二卷，全书共十卷。各卷的时间划分与简况如下：

第一卷　从旧石器时代开始到西汉末期，时间跨度最长，是

中国数学萌芽和积累时期，其中第一编为总论，讲述中国数学史研究的一些基本问题。

第二卷　集中论述中国经典数学著作《九章算术》，包括它的成书过程、数学成就、流传和影响。

第三卷　东汉到三国末的240多年间中国数学的发展情况，刘徽为本卷的中心。

第四卷　西晋到五代末的将近700年间的中国数学的发展情况，其中包括祖冲之、王孝通等著名数学家的工作，以及插值法的形成、民间数学。

第五卷　两宋时代的数学发展，主要数学家如刘益、贾宪、沈括、秦九韶和杨辉均在其中。

第六卷　金、元、明（到1600年），包括西夏在内，李冶、朱世杰等的工作为重点，一直到明代后期的程大位，突出的是代数和珠算。

第七卷　明末到清中叶，约为1600年到约1760年的160年间中国数学的发展情况，其特点是西方初等数学比较系统地传入了中国，使中国开始向西方数学过渡。其中徐光启、梅文鼎和明安图等的工作颇有影响。

第八卷　清中叶到清末，约为1760年到约1911年的150年间中国数学的发展情况，其特点是复兴古算和西方近代高等数学的系统传入中国，主要数学家有戴震、李锐、汪莱、董祐诚、项名达、戴煦、徐有壬、李善兰、华蘅芳、黄宗宪等。中国传统数学已逐渐全部被西方数学所取代。

原来的框架下限到1949年，现经协商，把1911到1949年这一段暂不列入。

副卷第一卷　早期的外国数学史料，主要是把那些与中国传统数学内容相当且较精彩的外国数学文献译为中文，汇编在一起，供读者进行中外比较之参考。因此，本卷有点像美国人的《A

Source Book in Mathematics》。

副卷第二卷　中国算学书目汇编，是把从古代到 1911 年的数学书编成索引，失传的和现存的都收入。对现存书都注录版本及主要藏书处所，以便读者利用。

按照以上的划分与安排，除对以前已完成的前 3 卷进行必要的修改、补充外，其余各卷已都以着手撰写，预计到 1999 年底全部完稿，争取提前完成，在本世纪出齐。

这套中国数学史著作的完成是我们所作的一次世纪总结，也是对新世纪的展望。

《中国数学史大系》编委会

第一卷 前 言

本卷是全书的第一本，其内容包括两大部分：第一部分是总论，比较详细地论述了中国数学史研究中的一些基本问题，如中国数学史的研究对象、方法、意义、分期、历史和现状以及中国传统数学的特点等，是全书的总纲，也是全书的指导思想。这一部分很难撰写，写出来肯定是议论纷纷，但是做为数百万字的《中国数学史大系》显然是不能不写的，听听意见只有好处而没有坏处。

第二部分是讲中国数学的萌芽和早期数学知识的积累，在全书各卷中此卷所跨的时间最长，包括从旧石器时代末期到西汉末约一二万年中国数学发展的历史。资料十分零碎，迄今尚无人对这段中国数学史进行全面、系统的整理和研究，当然有些短篇文章或在有关的著作中有过一些报导或讨论。资料的来源和种类也十分复杂，最早的是出土文物，根据文物的形状或其上的刻划符号探讨中国数学的萌芽。其次是甲骨文和钟鼎文（金文）（实际上甲骨和钟鼎都是文物）中的数学内容。再次是到秦汉时期在竹木简牍和帛书上的有关数学史料，特别是简牍上数学史料更多。最后还有流传下来的大量典籍中都有关于数学的记载。

从数学内容来看，大体上都是算术和初等几何问题，也有极少数的初等代数和数论问题。这些问题多数与具体事物相连结，如水利工程、运输、田亩、税赋、军事、占卜、机械制造、乐律、度量衡、会计、天文历法、建筑、分配、交换等等，甚至法律等也涉及数学问题。有少量的数目字等是抽象的。

在这一时期的末尾已经出现了专门数学著作，如所周知，西

汉末有《许商算术》和《杜忠算术》两书，但都早已失传。流传至今的《九章算术》，其成书年代说法不一，我们定为西汉末期。至于《周髀算经》一书，主要讲天文问题，其中涉及较多数学内容，成书时代早于《九章算术》，本卷定为西汉初。因此，我们很自然地把《九章算术》与这些零星史料分开，而放到了第二卷。这样做又出来一个新的矛盾，就是有少数的数学史实晚于《九章算术》而安排到了第一卷，就是提前论及了。这实在是一个不得已的办法。

正在我们这样安排好，并且快要开始写作时，突然在湖北出土了一部竹简数学书——《算数书》，对我们的这一工作产生很大影响。影响是如此之大：以致于我们必须考虑，是按原计划进行撰写呢，还是暂时停止写作、等待将来《算数书》全部释文发表之后重新安排卷次再撰写呢？我们经过初步了解，《算数书》的整理难度很大，颇费时日。等到全部释文发表，可能需要若干年的时间。在这种情况下，我们不得不仔细研究解决办法，复与出版社商量，继续按原计划进行，不等待该书的全部释文出版。由于《算数书》的成书年代正好属于第一卷的范围，我们于是采取这样办法：在第一卷中一定要反映这一重大发现，就是根据已经发表出来的少量资料加进相应的章节，这就是本卷第三编第二章的大部分。俟《算数书》全书出版后，视全部情况再考虑本书的修订问题：如果内容不太多，把新资料加进原来的书中，也许把原来的一章扩充为两章，甚至一编；如果内容很多，将做另外的考虑。总之，我们决不等待，因为新史料、新成果总是不断出现的，只能尽量争取在写作时反映新东西而已。

本卷的撰写工作存在许多困难问题，除了上面已提到者外，还有以下几点：首先是不成熟，这一阶段的中国数学史虽然有过一些工作，有的如《周髀算经》等研究的很多，可是还有许多部分尚未深入研究，甚至没有研究，这就需要我们认真下番工夫，做

些系统、深入的清理工作，把一些空白补上。其次是资料太分散，不集中，一鳞半爪，这一点那一点，尤其考古资料可以说全国各地都有，分别收藏于各级博物馆或文物部门，公开发表出来的仅是一小部分被认为比较重要的，多数的都没有公诸于世，也没有文物目录，无法全面了解。再次是由于过去对这部分历史研究不够，因而存在的问题也最多，例如很多“起源”问题大都不清楚，有些有人提过看法，有的则没有，我们也只能推测，提出初步看法。最后一个困难是缺少一个现成的框架做为我们的参考，编、章、节的安排几乎完全是在一块空地上构造起来的。

根据全书的编写要求，本卷的安排分为四编，第一编“总论”具有独立性，后三编是有联系的，第二编大体上截止于战国末，第三编和第四编在时间上不是完全按时间先后排列的，而是并列的同时尽量照顾时间顺序，第四编的内容比第三编的内容要晚一点（特别是在时间的上限）。

这卷书稿完成于 1992 年初，到现在已经过了四五年，有些情况已有变化，但就研究内容来看变化不大。其中变化较大的是第一编第四章第四节“中国数学史研究的发展时期”只到 1988 年末，1989 年以后的情况没有列入，因资料较多也不再补充。可以采取另外的方式予以补救。这是要向读者说明的一点。

本卷各部分的分工与执笔人如下：

全书编写要求与方法、本分卷前言（李迪）；

第一编第一、二、三、四章（以上李迪）、第五章（李继闵）；

第二编第一章（李迪、陆思贤）、第二章（李迪、陆思贤）、第三章（孔国平）、第四章（罗见今）、第五章第一节（罗见今）、第二节（冯立升）；

第三编第一章（杜定久）、第二章（白尚恕，其中第四节冯立升）、第三章（郭世荣）、第四章（李兆华）；

第四编第一章（冯礼贵，其中第一节李迪）、第二章、第三章

（李继闵）、第四章（冯立升）；

全卷的统稿与加工等工作（李迪）。

本卷的写作开始80年代中后期，到1992年初全部处理完了，并交出版社。但因等待后续各卷而没有发排。从1993年起进展较为缓慢，可是有些卷还在继续撰写。其中第二卷（原来第一卷第二分册）和第三卷（原来第二卷第一分册）到1995年均已完成初稿，1996年由李迪和沈康身分头处理和加工。

1996年10月在北师大出版社的审稿会上，对本卷（原第一卷第一分册）从出版社取出，再次进行讨论。很显然，由于时间的推移，几年前的书稿不免存在一些问题，有少数部分重写，绝大多数保持原貌。

在编写过程中，主编吴文俊院士进行了热心指导，北京师范大学出版社给予了真诚的支持与合作，使得本卷能再次顺利修改定稿，衷心感谢。

因系多人执笔，再加各部分内容自身的差异，故在风格上显得不太一致。虽然我进行了不少加工、修理和弥合，但斧凿的痕迹仍到处可见。其中疏漏、不妥之处，甚至错误当不在少数，恳请学界同仁和广大读者惠予指正，至所欢迎。

李迪

1996年12月5日

于内蒙古师范大学寓所

中国数学史大系编委会

目　录

全书编写要求与方法 …………………………………………(1)

第一卷前言 …………………………………………(1)

第一编　总　论 …………………………………………(1)

第一章　中国数学史的研究对象、价值和任务……(1)

第一节　中国数学史的研究对象……………………(1)

第二节　研究中国数学史的价值……………………(7)

第三节　研究中国数学史的任务……………………(17)

第二章　中国数学史的研究方法与要求……………(26)

第一节　中国数学史的研究方法……………………(26)

第二节　对中国数学史研究的要求…………………(34)

第三节　研究中国数学史应遵循的原则……………(43)

第三章　中国数学史的分期…………………………(47)

第一节　分期举例……………………………………(47)

第二节　中国数学史分期的标准……………………(53)

第三节　我们的分期方案……………………………(56)

第四章　中国数学史研究的历史与现状……………(63)

第一节　中国数学史研究的萌芽时期………………(63)

第二节　中国数学史研究的奠基时期………………(67)

第三节　中国数学史研究的动荡时期………………(72)

第四节　中国数学史研究的发展时期………………(78)

第五章　中国传统数学的特点………………………(84)

第一节　中国传统数学的独创性……………………(84)

第二节 中国传统数学的社会性……………………（90）
第三节 中国传统数学的东方色彩……………………（96）
第四节 关于中国传统数学的理论成就
与局限性的评论……………………（103）
第二编 中国数学的萌芽……………………（115）
第一章 数学在中国的萌芽……………………（115）
第一节 对形状的认识……………………（115）
第二节 最早的数目观念……………………（124）
第三节 从民俗和遗风理解原始社会数学……………………（133）
第二章 甲骨文时代的数学……………………（143）
第一节 数目与数词……………………（143）
第二节 算术运算和数字排列……………………（151）
第三节 顺序的概念……………………（158）
第四节 数学工具……………………（163）
第三章 金文中的数学知识……………………（168）
第一节 时代背景……………………（168）
第二节 数量与运算……………………（171）
第三节 历法与占筮……………………（180）
第四节 从青铜器看周代的几何知识……………………（189）
第四章 先秦古籍中的数学思想……………………（193）
第一节 《周易》中的数学思想……………………（193）
第二节 先秦诸子的数学观……………………（210）
第三节 《墨经》中的数学……………………（227）
第五章 工程技术与《考工记》中的数学……………………（244）
第一节 《考工记》中对数学的应用……………………（244）
第二节 春秋战国时期的测量与制图……………………（258）
第三编 秦汉简牍中的数学与筹算……………………（269）
第一章 秦、西汉的时代背景……………………（269）

第一节 统一帝国的政治、经济和文化 …………………（269）
第二节 科学技术 ……………………………………………（278）
第三节 科学专著与专业科学家的出现 …………………（285）
第二章 竹简《算数书》与三阶纵横图……………（292）
第一节 《算数书》的出土概况 ……………………………（292）
第二节 《算数书》的内容 …………………………………（295）
第三节 《算数书》的出土对中国数学史研究的
意义与价值 ……………………………………（300）
第四节 三阶纵横图 …………………………………………（301）
第三章 简牍中的零星数学史料……………………（309）
第一节 秦汉简牍发现情况 …………………………………（309）
第二节 简牍中的算术四则运算……………………………（320）
第三节 简牍中的其他数学史料……………………………（344）
第四章 算筹与筹算法………………………………（365）
第一节 算筹 …………………………………………………（365）
第二节 筹算 …………………………………………………（375）
第四编 秦汉天文历法与工程中的数学 …………………（385）
第一章 "周髀"中的数学内容……………………（385）
第一节 "周髀"的成书过程 ………………………………（386）
第二节 "周髀"中的几何知识……………………………（391）
第三节 "周髀"中的算术代数知识和数学观点………（400）
第二章 《三统历》中的近似分数计算法…………（407）
第一节 《三统历》之立法与数据 …………………………（407）
第二节 《三统历》中关于五星周期的观测记录………（412）
第三节 天算家的分数约简与近似算法
——"通其率"术 ………………………………（422）
第三章 汉历法中的不定分析——上元积年的推算 ……
……………………………………………………………………（430）

第一节 岁星纪年与超辰法 ………………………… (430)
第二节 "通其率"算法与历法中的周期问题 ……… (436)
第三节 汉代历法中上元积年的推算 ……………… (440)
第四章 秦、汉时期工程技术和律学中的数学…… (448)
第一节 工程技术中应用的数学知识 ……………… (448)
第二节 度量衡器具研制所用到的数学 …………… (462)
第三节 音律学中所应用的数学知识 ……………… (472)

第 一 编

总 论

本编主要论述与中国数学史研究有关的若干理论问题和研究历史与现状，做为全书的导论。

第一章 中国数学史的研究对象、价值和任务

为什么要研究中国数学史？这是中国数学史研究者必须回答的问题，而且是一部大型中国数学史著作应当首先回答的问题。因此，我们也就开宗明义，把这个问题放在了全书的第一章。

第一节 中国数学史的研究对象

研究中国数学史和研究其他学科一样，需要明确其研究对象，而研究对象又是由中国数学的定义所规定的。

1. **数学史的定义**。应当怎样理解“数学史”这样一个概念？到目前为止还很少有数学史家直接提出自己的看法，更不见人给“数学史”概念下过明确的定义。也许多数数学史家认为这样做没有必要，因而是徒劳无益的。但是，我们不同意大多数数学史家的看法，主张应当对“数学史”这个概念给出定义。

数学是量的科学，是研究量的性质与规律的科学。数学史是研究人类对于量的认识和把这种认识用于征服客观世界的历史，而认识和征服的过程有其自身的规律性，于是数学史可定义为研究数学发展规律的科学。数学史是科学史的组成部分，但是它与科学通史或其他分支科学史（如物理学史、天文学史等等）有些不同，主要的不同点来自数学，因为数学差不多从它诞生时起就与社会现象有关系，而且这种关系越来越多、越来越密切，以致于很难把数学归于自然科学，所以很显然，数学史就具有更多的社会科学的成分。正因为如此，对于一个数学史家来说，除了有较多的数学知识外，还要求掌握较多的社会知识，如军事、游戏、赌博、保险、租税、运输等等方面的初步知识。对于一个物理学史家的要求，相比之下在这方面就少一些。

由上述情况可知，数学史是一门杂交学科，是由数学和历史学杂交而成的，因而它既不像数学，也不像历史学，可是又都有点像。根据这个事实，数学史具有数学和历史学双重性质，而历史学性质更多些。这也就要求数学史家对历史学应给予较多的注意，一个对历史学一无所知的人研究数学史，无论如何是有缺陷的。

2. 中国数学史的定义。在有了数学史定义的前提下，中国数学史就好理解了。中国数学史是主要研究数学在中国发展的特殊规律的科学——这就是中国数学史的定义。为什么这样下定义呢？因为数学本身存在固有的规律性，任何民族和国家的人民对它的认识都是按照这种规律的，所有的数学发现带有共性。例如直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方，算术四则运算，比例关系等等每个民族和国家的人民对它们的正确认识都是一样的，在原则上没有任何区别。不同的是有些国家所采用的进位制，以及某些数学思想等，例如中国、印度等主要采用十进制，希腊、阿拉伯采用六十进制，北美的玛雅人（Maya）则采用二十进位制，这

并不影响普遍规律。由此可知，国别数学史，不论哪个国家的都是如此。但是每个国家有每个国家的具体情况，数学在每个国家的发展又都有些特殊之处，形成了一些特点。国别数学史主要研究数学在各国发展的特点，中国数学史也主要是研究数学在中国发展的特殊性。

数学在中国的发展有哪些特殊性？谁也没有正面回答过这个问题，而且是个很难回答的问题。本编第五章“中国传统数学的特点”能够对这个问题给出部分解答，整个问题的全面回答要由本书逐渐给出。

我们说中国数学史主要研究数学在中国发展的特殊规律，是说注意力放在特殊规律上，而不是完全离开数学发展的普遍规律的。事实上，在同一个学术领域中特殊规律与普遍规律处于互相依存的状态，特殊服从一般，一般又寓于特殊之中。中国数学史也必须考虑普遍性问题。就是说中国数学史与数学史在宏观上来看是一致的，而从微观上看又有不同，研究者的注意力主要在不同点上。

我们在给中国数学史所下的定义中看来用语比较繁琐，可是不能较简地说成“中国数学史是研究中国数学发展规律的科学”，因为数学没有国界，除了早期发展各国有较多特殊之处外，不存在某一国的数学，同样不存在纯粹中国数学。

很显然，中国数学史是数学史的一部分，也是中国科学史的一部分。钱宝琮认为“中国数学史是中国文化史的一部分，也是世界文化史的一部分。”① 这个观点可追溯到英国的李约瑟，他说：“现在，已经有越来越多的人认识到，科学史是人类文明史中一个

① 钱宝琮. 中国数学史，序. 北京：科学出版社，1964

头等重要的组成部分。”[1] 和我们的说法与理解有所不同，就是“文化”或“文明”尚需进一步说明，否则是不明确的。

3. 中国数学史的研究对象。数学史家根据什么研究数学在中国发展的特殊规律呢？也就是中国数学史以什么为研究对象？概括起来说，中国数学史的研究对象包括中国历代数学成果、数学学术活动和数学思想及有关历史背景。为了明确我们的看法，有必要做些解释。

中国历代数学成果是中国数学史的最主要的研究对象，没有数学成果的数学史是不存在的。可以这样说，任何一国的数学史都以数学成果为前提。因此，数学史研究首先要清理历代数学成果，成果数不清（只是相对而言），其余研究不好开展。中国数学史研究也是首先要研究历代中国人所取得的数学成果，分析每项成果的水平，探讨成果与成果间的关系以及取得成果的方法，成果的意义等等。需要指出的是，我们所说的数学成果是广义的，就是既包括那些领先于世界的高水平成果，也包括低水平的数学知识。例如18世纪中国人很少有领先于世界的数学成果，可是我们不能因此而不进行研究。有高水平成果研究高水平成果，没有高水平成果就研究低水平成果，研究的角度当然要有不同。

中国历代数学学术活动和数学思想的内容十分丰富，是中国数学史的重要研究对象之一，至少应当包括数学教育、中外数学交流、学术团体和学术会议、数学论著的编辑、出版和销售、数学思想和数学家的传记等等。算具的发明和制作，它们的推广应用等也都属于这类研究对象。很难设想，只把历代数学成果算作研究对象的中国数学史是个什么样子。在数学的学术活动中，数学家扮演着中心的角色，离开数学家的数学学术活动不多，所谓

---

① 李约瑟. 中国科学技术史，中译本第一卷第一分册. 北京：科学出版社，1975. 1（按：该书原版出版于1959年）

数学思想也主要是数学家的思想（当然也包括非数学家的数学思想）。因此，数学家的传记理所当然地是数学史的研究对象。为什么把“数学论著的编辑、出版和销售”也列为中国数学史的研究对象？理由很简单，因为有的工作就是数学家自己担任的，如数学期刊和著作的编辑，从出版和销售能够了解到社会上的需求情况和其他信息。

与中国数学史有关的历史背景，也是中国数学史的研究对象。任何一门科学在某个国家的发生和发展都是在各该国家的历史背景下展开的，并受历史条件的制约。数学在中国的发展，从开始起就和中国的特殊环境结合在一起，与社会政治、军事、意识形态，甚至和民族的性格等等都有密切关系。研究中国数学史虽然不一定花大气力研究有关历史背景，但是绝对不能不研究，我们是把它做为中国数学史的非重点研究对象，要研究又有一定的限度。

4. 中国数学史资料。中国数学史的研究对象在哪里？在资料里——在中国数学史资料里，这是数学史家都知道的。把中国数学史看作一门历史学科，它的研究对象就是来自有关的历史资料，是数学史研究中首要的东西。李俨早已指出：“编录史实，首重资料”[①]，正是这样，他在资料方面下过很大功夫，他的各种数学史论著中资料之丰富自不待言。中国数学史资料和其他历史资料差不多，从其保存形态来看，大体可分为三类，即文献资料、实物资料和音响资料。以下我们分别讲一下这三类资料，但是都不涉及纯背景性资料，另外，这三类资料有的可以转换，有的还不好区分归类，就只好做些规定。

文献资料。是指以文字形式记载的数学史料，其中包括甲骨

① 李俨. 三十年来的中国算学史，中算史论丛第五集，北京：科学出版社. 1955 153

文、金文（钟鼎文）、简牍、帛书、石刻文字和在纸上写的文字或印刷文字等。在这些文献资料中，以纸质资料历史时代最长而且数量最大。纸质数学著作最关紧要，绝大多数的数学成果保存在那里，因此应当给予最大注意。众所周知，中国的数学著作极为丰富，据丁福保、周云青著录的统计，流传至今的就有八百余种[①]。但是失传的中国数学著作之多也是相当惊人的。从那次统计之后，还不断有新的发现，估计现存中国数学著作总数在一千种以上。在其他一些著作中也有记录数学成果的，如天文历法著作、历史著作（如《二十四史》等）、笔记、日记等等都是不可忽视的。

实物资料。此类数学史资料的范围极广，而且涉及到的年代最长。从范围上来看，包括计数实物（如结绳、刻契等）、算具（如算筹、算袋、算子筒、珠算盘、手摇计算器、计算尺等）、与数学有关的测绘器具（如规矩、后来的直尺、圆规、比例规、量角器、分厘尺等）、几何形象（如早期器物的几何形状及某些器物上的几何图形、特制的几何模型等）以及其他实物（如历史上绘画中所表现的几何图形、岩画上的数学内容、录像等）。从时代上来看，上自原始社会，下至现在，每个时代都有，地域分布也广泛得很。因此，搜集、统计颇为困难。

音响资料。这种形式的数学资料时间最短，不过几十年的历史，数量最少。音响资料主要是录制的与数学内容有关的某些声音，最重要的是调查数学家、有关人士的谈话录音。此项资料目前虽然很少，但是将来一定能得到迅速发展，尤其是当代中国数学史的研究更为重要。音响资料人们有时也称为口头资料，或有声资料。

总之，资料是数学史研究对象的来源，是十分重要的。

---

① 丁福保，周云青．四部总录算法编，周云青序．北京：商务印书馆．1957．4

第二节 研究中国数学史的价值

在第一节中我们说明了什么是中国数学史的问题，本节将说明为什么要研究中国数学史的问题。为什么要研究中国数学史呢？因为它对我们来说有意义，或者说有各方面的价值。

1. **借鉴价值**。历史就像一面镜子一样，照耀着人类前进的道路，人类要回过头来看一看走得是否正确？中国数学史也是这样，对中国乃至其他国家都有借鉴价值。

借鉴什么呢？我们认为至少有以下几方面：

首先是中国数学有自身的特点，这个问题设专章（即本编第五章）予以论述。此处需要指出的是：所谓“特点”（或“特色”）是指那些大体上区别于西方数学的内容、思想和方法，其中有优点，也有缺点，例如优点是长于计算，注重演算程序，实用性较强，缺点主要是逻辑性弱，理论水平没有上到应有的高度。这种情况对于现在中国或其他国家在数学研究，特别是制订发展数学政策的时候，中国传统数学就具有借鉴价值。但是，我们所说的优点和缺点只有相对的意义，而不是绝对的，别的研究者可能有不同甚至是完全相反的看法，在不同的国家或者是不同时代的人在对中国传统数学的优缺点的认识上也会有很大差别。因此，在借鉴时只能是各取所需。

其次是对待引进外国数学的态度问题。在中国数学史上，对引进外国数学的问题上，中国的态度是变化不定的。早期，一般说没有一种明确的政策，既不积极吸收，传进来也很随便，吸收了一些，另一些则是被抛弃了。例如从印度传进来的笔算、正弦函数表等，尽管有的已在 8 世纪的唐代被译为汉文，然而并没有被中国人所采用。阿拉伯数码又在元代传入中国，可是中国人照样没有吸收。不过在这段很长的历史时期内，外国数学的传进无

人干涉，处于一种自由的状态。这大概是由于中国传统数学在各方面的需要上能够自足，不吸收外国数学完全可以。可是到明末的时候，情况就完全变了。由于历法改革的需要，以政府的名义大量翻译西方的历算书籍，对外国数学表现出一定的积极性。入清以后，对外国数学仍是一种热情的态度，不仅民间学者学习、吸收，就连最高统治者康熙皇帝玄烨由于需要也努力学习西方数学，甚至把西方传教士请进宫中给他讲解几何学、三角学等。后来西方数学的传入逐渐减少，以致在十八九世纪间约一百多年完全停止，在政策上就没有引进外国数学这一条，而是兴起了一股复古热潮，与西方数学迅速发展的潮流完全隔绝。19 世纪 50 年代，西方数学以不可阻挡之势源源传入中国，在不到 40 年的时间里翻译出版了大量西方数学著作。就在这时，也就展开了一场围绕对吸收西方数学的大辩论。总的来说，吸收外国数学不仅是必须的，而且是应当的，但是如何吸收，吸收到何种程度仍然是当代中国或其他国家值得考虑的大问题。中国历史上对待吸收外国数学的态度何时对何时错及其对中国数学发展的影响如何（包括好的和坏的两方面），至今是值得认真对待和借鉴的。

我们还应当进一步总结中国数学发展史中更广泛的经验和教训，这对我们今天的工作显然大有好处。发展任何学科都不能离开本学科的历史，在今天很少有没有历史的学科，现在的学科是历史的继续，尤其是像数学这样具有悠久历史的古老学科更是如此。通过历史的考察，在一定程度上可以避免或减少重蹈前人失败的覆辙，汲取成功的经验，使数学顺利、健康的发展。除了前面我们提到的两个问题之外，还有一个问题必须提出，就是中国历史上的数学教育和人才培养问题。在唐代，数学教育成为国家教育学科之一，有一批批青年受到正规数学教育，但是没有培养出一个高水平的数学家，在数学上做出成就的张遂（一行）根本没有登过国家明算科的大门。宋代虽然有时设有数学教育，可是

也同样未培养出像样数学人才，刘益、贾宪、沈括、秦九韶、杨辉等著名数学家都不是从国家数学教育学校出身的。明代国家学校中长期忽视数学教育，而在民间也极少有成就的数学家。到了清代晚期，在北京同文馆中设立算学课，并且聘请了李善兰这样的著名数学家为教习，也没有出现有突出成就的数学家。因此，对中国历史上的数学教育（主要是国家的）应做怎样评价，是成功还是失败？国家所需要的人才和高水平数学家有无关系？国家的数学教育到底应当解决什么问题，培养什么样的人才？都是值得深思的。还有，现代的数学教育和历史上（如前面所列举的）的数学教育究竟有何不同？所有这一切都有必要加以探讨，做出结论，提供给今天的数学教育机构，做为参考。

中国数学在世界上是一种模式，它不同于埃及、巴比伦、印度、希腊、阿拉伯等的数学，也不同于近代以来的欧洲数学。中国的数学模式，除了其本身所具有的特点之外，还具有持续存在的时间长和保持独立性很强的特点，这是任何其他国家或地区都不能相比的。由内容和独立存在时间长所决定的中国数学模式有世界意义，可以把它和其他模式比较，探求一国数学发展的道路。

2. 教育价值。中国数学史的教育价值是多方面的，这一点它和世界数学史乃至科学史一样。前人早有许多论述，例如法国著名科学家保罗·郎之万（Paul Langevin，1872～1946）早在1922年就说过："在科学教学中，加入历史观点也是有百利而无一弊的"，强调科学史在教学和师资培养上的重要性[①]。美国著名数学史家史密斯（D. E. Smith，1860～1944）正是为了教育的目的才写出了《数学史》这部名著。目前世界上不少国家在高等学校开设了数学史课程，前苏联著名数学史家尤什凯维奇（А. П. Юшкевич）等认为"数学史课程对专攻这一领域的每个大学生都是

① 保罗·郎之万. 思想与行动（中译本）. 北京：三联书店，1957

有益的。无论是树立完整的世界观，还是对于中学教学工作，未来教师都需要这一门课程。"[1] 我们所说的教育并不是仅仅局限于学校教育，而是指包括学校教育在内的广义教育。中国数学史的教育价值表现在以下几个方面：

首先是给学习者打开了一扇小小的知识之窗，通过数学史可以了解到许多不曾知道的知识，起着扩大眼界的作用。例如在中国历史上有些数学成果，像"重差术"、"大衍求一术"、"天元术"等等，现代数学中基本上都不提了；中国古代没有三角法，所有需要三角法的问题用"重差术"予以处理，历法计算上"插值法"占着重要地位，几何多以计算和勾股形为主，……这些都和西方数学不同。只有通过中国数学史学习才能知道上述的各种情况，比较中西数学之差异，两者存在着不同的体系，增加知识内容，开阔思路。

其次是有助于培养学习者的辩证唯物主义观点。辩证唯物主义和历史唯物主义观点是我们培养人的重要内容之一，中国数学史能够在一定程度上为这一内容提供些素材。通过中国数学史的学习可以把数学在中国发展的实际情况比较清楚地了解到，具体地说，至少能起到以下作用：第一，形象而具体地建立发展的观点，知道各种数学成果的来龙去脉，由初级到高级、由简单到复杂的发展过程。一部中国数学史在某种意义上说，就是一个辩证唯物主义和历史唯物主义的模型，人们通过这种模型形象地看到了认识的发展，在模型中没有永远不变的东西。第二，培养人们存在决定意识的观点，这种观点是辩证唯物主义哲学的灵魂与核心。恩格斯曾经指出："科学的发生和发展一开始就是由生产所决

---

① A. П. 尤什凯维奇等. 苏联师范院校的数学史课程（中译文）. 科学史译丛，1986（1）：74～78

定的。"[1]通过生产和其他社会活动，人们就会接触到各种自然现象，逐渐有了一些感性认识，再上升到理性认识。因此，科学上的任何发现，归根到底都是客观存在在人们头脑中的反映，最终决定人们的意识，就是最抽象的科学理论也不能与存在毫无关系。在这方面，中国数学史是一个活生生的例子，著名的《九章算术》就是个典型，通过全书246道题的内容处处可见其与客观存在的联系（其中有些题目显然是虚构的，然而并不与我们的看法有矛盾）。第三，使学习者正确认识思维的作用。人的科学认识由感性上升到理性认识，中间要经过思维这个过程，而且是个很复杂的过程，中国数学史上这种具体事例很多，如关于球体积的解决，由"天元术"到"四元术"的推广，明安图的"割圆连比例"等都再恰当不过地说明了思维的作用，再现了思维的表象。第四，树立群众创造世界的观点。马克思主义者认为，人民群众是创造世界和历史的主人，但也不否定杰出人物在历史上所起的作用。科学既然来源于人类社会实践，那么创造科学的自然是那些直接或间接从事社会实践的人们。从数学史上我们可以看到大量这样的事实：一些算法首先在民间广泛流传，或者对一些问题给出了经验解法，然后由数学家进行研究，得出理论性的结果。任何一个数学家都是来自普通群众，在我国历史上像刘徽、祖冲之、秦九韶、朱世杰等杰出数学家都不例外，刘徽和朱世杰的一生为布衣。在数学史上根本没有"先知"的圣人，也不存在不出于人民群众的数学家。

其三是指引人们沿着数学的规律前进。数学史特别是数学家传记部分给予人的鼓舞作用相当大，有很多人正是在前辈数学家感人事迹的鼓舞和指引下在事业上取得了成功。这可以从以下四个方面说明：第一，给人以前进的力量。在这方面主要是培养人

---

[1] 恩格斯．自然辩证法．北京：人民出版社，1971．162

们对事业的兴趣和信心，从而献身于业已选定的事业与目标。美国著名科学史家弗·卡约里（F. Cajori，1859～1930）早在80多年前就指出：我相信，“读一点科学史有助于对科学发生兴趣。并且由阅读科学史而得到的关于人类知识发展的总的观念本身是鼓舞人心并有助于解放思想的。”[①]中国数学史上的大量事实和数学家的事迹能起到这种作用。第二，接受前人的经验教训[②]。一部数学史总要讲述一些前人在具体数学研究方面的成功或失败的事例，学习者应很好的分析和研究，从中接受经验或教训。第三，数学史能给人许多启发。数学史的内容很广泛，常常给不同的学习者以不同的启发，在帮助人们的学习或研究方面有很大的作用。例如前人发现问题、提出问题、解决问题等的各种思考方法，对于现代人大有益处，往往由于受到前人某种启发而获得成果。刘徽对球的体积的研究受到两方面的启发：一是张衡的球与其外切立方体的体积关系的研究，一是他自己关于正圆锥（圆台）和其外切正方锥（方台）的体积关系的研究，从而获得了球与其外切“牟合方盖”的体积关系的重要结果。第四，沿着数学发展的客观规律前进。数学史和其他事物一样有其自身的发展规律，这种规律有点像生物的进化，正在向下延伸的“活”东西。对数学的研究像置身于数学发展历史的长河中那样，按其流向和趋势考虑问题，随着趋势前进，以避免走入支流或泥潭。因此，有一些数学家，甚至很有名的数学家到一定时期还要回过来检查历史看看自己是否走得正确。

最后是陶冶人的品质。美国化学家柏廷顿（J. R.

---

① 弗·卡约里. 物理学史. 第一版序（中译本）. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1981. 卷前

② 这里所说的“经验教训”仅指在课题研究中小的具体的经验教训，而非方针政策，因此与“借鉴价值”中的不同。

Partington）曾经说过："几乎没有例外，伟大的化学家都特别富有一种使我们羡慕和尊敬的个人品质。"[1] 伟大的数学家何尝不如此，那些优秀数学家的传记，一部好的数学史在陶冶人的品质方面都有明显的作用。数学家们的优秀品质值得人们学习。第一，刻苦钻研，持之以恒的精神。数学家的任何一项研究成果都是通过艰苦劳动而取得的，例如祖冲之求圆周率到小数点后第七位（当时没有小点记法），当时使用算筹进行计算，困难很大，可是他却求出了正确结果。他在天文学研究方面，也是"考景弥年"。蒙古族科学家明安图研究级数，断续地坚持了30年，直到去世时尚未完成，不得不让学生和儿子续成，又工作了10年（自然不是连续的）才完成《割圆密率捷法》这部重要数学著作，其中有大量的多位数（有的达30多位）四则计算[2]，艰苦的程度和持之以恒的精神十分感人。第二，实事求是，谦虚谨慎的作风。一部数学史（当然包括中国数学史）在某种意义上，可以说是数学家实事求是作风的记录，因为数学史上记载的绝大部分是公认的研究成果。任何数学成果的取得除数学家刻苦钻研外，还要有求实精神，骗人的把戏是不行的。刘徽是一位实事求是的典范人物，在他求解"牟合方盖"体积而未获结果时说："判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可正等。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。"[3] 实事求是，谦虚谨慎的态度跃然纸上。李冶对自己所喜爱的数学只是淡淡地说是"九九贱技"，自己的著作《测圆海镜》也只能是"其悯我者当百数，其笑我者当千数"[4]，也是一种谦虚之表现，而没有把自己的工作评价得很高。第三，为真理而斗争。科

---

① J. R. 柏廷顿. 化学简史（中译本）. 北京：商务印书馆，1979. 2

② 李迪. 蒙古族科学家明安图. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1978

③ 九章算术，卷四，少广章，刘徽注。

④ 〔元〕李冶. 测圆海镜. 自序。

学的征途是不平坦的，特别是那些在科学界还不知名的“小人物”有了突破性成果时，所遇到的波折要多得多，成果不会顺利被承认，而研究者往往要受到各种责难和攻击，甚至陷害和迫害。在中国数学史上针对数学成果的争论，一般说不太激烈，但也是存在的，而数学家兼天文学家的天文研究成果受到攻击之事例则不鲜见。数学家要在自己的或他人的有价值的数学成果（真理）受到不公正待遇时，要坚持真理。第四，爱国主义教育的作用。中国数学中还有一项特殊的陶冶人的品质的教育价值，就是爱国主义思想教育。早在20世纪50年代初期，中华人民共和国教育部颁布的中学数学教学大纲中就明确规定，为了对中学生进行爱国主义思想教育而在教学中向学生介绍中国古代的数学成就。1951年3月15日，中国数学会临时常务干事会为了配合爱国主义运动给全国数学界的信中曾提出过四项建议，希望人们学习中国古代数学成就，其中的第二项是：“凡数学的定理或方法，为我国人先发现的，都一律改系我国人名；即使不是最先发现而是独立研究出来的，也该将中外发现者姓名并列”①。

我们还要注意到，中国数学史的教育价值并不是绝对的，它只能在一定情况下起它应起的作用。

3. 实用价值。中国传统数学是在中国这块土地上发生发展起来的，长时期内为中国和其他一些国家广泛使用，曾经在人们的生产、生活和科学研究中发挥过重大作用。当然由于时代的推移和进步，中国传统数学中的大部分内容已逐渐退出历史舞台，但是并不是说完全无用了，仔细研究一下即可发现：还有多方面的实用价值。

首先是数学知识的应用，中国历史上积累的数学知识异常丰富，实用性也很强。目前，由于中外数学的合流，使人们觉察不

① 光明日报，1951－04－09

出来数学中有中国自己的东西，以为全是从外国传进来的。事实上并不是如此，恰恰相反，现在通用的数学知识中有相当的一部分是中国人创造的，越是初等的所占比重越大。日常生活中所用的数学知识，如算术四则运算、分数、多边形及圆面积、常见立体的体积、十进位制、圆周率等都不是外来的。中小学数学教材中包含着大量中国数学家的算术材料[1]，代数、几何方面的材料亦不少，看一下中国数学史著作便可得到证实。就是在高等数学中也有一些中国传统数学知识，不过为数不多了。总之，中国传统数学知识虽然有些已经被取代，如书写方法、数码等等不再使用，但是大多数还起着作用，没有离开我们。

其次是计算工具的应用。中国长期使用算筹进行计算，后来被珠算盘所代替。众所周知，珠算盘的构造十分简单，而使用非常方便。西方的算盘（abacus），十六七世纪时流行的纳贝尔筹(Napier's Bonb)，17世纪发明的计算尺和手摇计算机等有的早已被淘汰，有的已被送到博物馆，特别是在电子计算机问世之后，加速了那些计算工具退役的时间。唯独中国发明的珠算盘例外，现在不仅中国人在用，就连日本等国也没有完全废弃。中国的小学生要学习珠算，每年还要举行全国珠算比赛，成立了中国珠算协会，日本也有类似的学术团体，通过珠算与计算机比赛可知，加减运算珠算更快，显示了珠算的一些优越性。看来珠算还有存在的价值和生命力。

最后是思想方法的应用。中国传统数学有自己的一些独特的思想方法，在研究和普及数学方面曾经发挥过巨大作用。例如，运筹思想、口诀等至今还有用处，“出入相补原理”、“刘-祖原理”[2]、

① 钱宝琮．算术教材中祖国数学家的成就．数学教学，1955，(2)：13～17

② 李迪．《九章算术》争鸣问题的概述．见：《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社，1982．28～50

程序性和机械化等等做为思想方法都有生命力，“刘-祖原理”在解决一些体积计算问题时仍不失为一种好的方法。实际上，在我们今天的数学中有些中国传统的数学思想方法起着作用，只是习以为常，不知其来源罢了。但是做为中国数学史研究来说，这一点是不能忘记的。

4. 学术价值。前面所讲的三种价值大体上都侧重于“应用”，虽然也关系到学术价值，但没有正面讨论这个问题。我们这里所说的中国数学史的学术价值是指它本身的价值和在其他学术领域的地位、作用等。

首先是中国数学有悠久的历史和丰富的资料，仅就这一点来说就有很高的研究价值。对于前人的工作和成就，我们应当一清二楚。中国数学史是中国科学史的重要组成部分之一，在世界数学史乃至科学史中都占有一席之地。一个国家或民族特别是像中国和中华民族，数学史的位置就更显得重要。通过数学史以说明中国文化科学的特点，说明中国数学对世界文化的影响，在世界数学史上的地位[①]。

其次是社会历史价值，就是说中国数学史是中国历史乃至世界历史研究中不可缺少的部分，因为数学的发展与社会的发展是紧密相联的。数学史研究将充实社会史内容，做为社会史的一部分进行研究，包括数学史在内的科学史与社会史本来是一个整体，不能分开。目前的中国历史研究，虽然对科学史有所注意，但是总的还是极为不够的，绝大部分著作也只能是广义的社会史。实际上，任何社会都离不开数学，因此数学史研究就等于社会史研究的组成部分。

最后是哲学价值。不论是哲学还是哲学史、思想史的研究，数

---

① 顾今用．中国古代数学对世界文化的伟大贡献．数学学报，1975，18（1）：18～23

学史都十分重要，因为数学史会给哲学研究提供活生生的可靠资料。数学史资料由于是过去的事情，往往对所涉及的事项有较完整的过程。同时，数学史研究常常揭示出一些带有哲理性的问题，正是哲学家所需要的。例如数学的起源问题，既是一个科学问题，又是一个哲学问题，对哲学研究大有用处。

研究中国数学史的价值非常广泛，我们虽然列举了以上四个方面，但是实际上并没有包括净尽，只是一些主要方面罢了。

第三节　研究中国数学史的任务

根据中国数学史的研究对象和研究价值，可知中国数学史的研究任务广泛而繁重，需要做的工作太多了。归纳起来有以下几方面：

1. 文献研究。文献研究是基础研究，是一切其他研究的开端，没有文献研究别的研究可以说无从谈起。但这并不是说，每一位中国数学史研究者都必须从事文献研究，而是可以利用他人的文献研究成果。不过一般的说多数研究者是兼做的，完全不做文献研究的人恐怕很难成为优秀的中国数学史家。有的数学史家用大部分时间从事文献研究，甚至一生都在做这种工作。在很多时候正是由于文献研究而推翻了前人的结论，或填补了空白，或提出新问题。例如在50年代中期，严敦杰、李俨正是由于文献研究而发现了古代历法中使用了内插法公式。文献研究是十分重要的。

首先是要掌握文献的保存情况，中国历史上的数学著作，前面在第一节中有个估计数字，就是有1000种左右，包括失传的在内将达到2000种。现存的中国数学著作（大约以清末为限）都保存在哪里，每种著作有多少版本，都应当弄清楚，编出详细目录，这才便于研究者使用。这个问题过去不仅有人想过，而且有人做过。此项工作，开始于清末，例如冯澂有《算学考初编》二十卷

稿本、梁兆铿有《天文算学考》十六卷稿本等流传到现在。不过早期的工作基本上没有详细指明各书的收藏处，不便使用。民国初年有裘冲曼曾做了进一步的工作，编有目录①，但所收者多为他本人、李俨和钱宝琮藏书。李俨对清代的数学著作进行了全面的了解，编有以人名为序的目录②，包括全国各大图书馆和一些个人所收藏的图书，失传的书籍也一并列入。邓衍林在30年代对北京地区的十九家图书馆所藏中国数学编有目录③。这些工作非常重要，可是都有局限性，都不全面，同时图书的收藏情况变化极大，如裘冲曼把自己的全部藏书卖给了浙江省图书馆④，李俨的全部藏书则捐赠给了中国科学院自然科学史研究所⑤，有些图书馆已经撤消，有些则合并，个人的藏书中有的则不知去向，可是几十年来又新增加了许多收藏单位和个人。因此必须从头来做这一工作，重新编写详细目录。

其次是对重要数学著作进行校点和注释。历史上流传下来的数学著作，现在人读起来有很多困难，主要的有文言文和名词术语的困难，越是时代早的阅读难度越大；古代数学书大部分没有断句和标点符号，只有清代梅文鼎的著作等为例外；还有些著作由于传抄和刊刻，造成一些错乱以及脱字、衍文等，或者由于书籍的破损，造成残文，都给读者带来困难。为了使较多的人读懂原著，就有必要对原著进行校点和注释。校点分校和点两方面的工作，校是改正原著中的各种错乱、脱、衍等字句，脱的当然要补，衍的当然要删，残文也要尽可能补上；点就是断句、加标点

---

① 裘冲曼．中国算学书目汇编．清华学报，1926，3（1）：43～92

② 李　俨．近代中算著述记．见：中算史论丛，新版，第二集，1954

③ 邓衍林．北平各图书馆所藏中国算学书联合目录．北平中华图书馆协会暨北平图书馆协会，1936

④ 浙江省立图书馆馆刊，1934，3（3，4）：1～12，13～24

⑤ 严敦杰．李俨与数学史．科学史集刊，1984（11）：1～5

符号。对多数数学书这样做是不可能的，也是不必要的。对少数重要的名著则必须这样做。在校点方面，钱宝琮的《算经十书》校点工作[①] 具有代表性，给读者阅读解除了许多困难。注释数学书在中国有很久的历史，刘徽、李淳风等对《九章算术》的注释工作是众所周知的，特别是刘徽的注释不仅帮助我们很好的理解《九章算术》，而且包含了他本人的大量创造性成果。最近，白尚恕在前人的基础上，对《九章算术》进行了新的注释，并同时再次做了校点工作[②]。李培业对程大位（1533～1606）的《算法纂要》进行了校释，业已出版[③]。但是其他一些，如《数书九章》、《四元玉鉴》等重要名著还没有注释本问世。

其三是把古数学书“翻译”成语体文，使其易于普及。这项工作还不多，较早的有胡术五等六人关于梅文鼎（1633～1721）《勾股举隅》的工作[④]，白尚恕关于《测圆海镜》的“翻译”也于不久前出版[⑤]。其他一些应当“翻译”的书，尚未见公布。

就注释和“翻译”来说，有两位外国人的工作要在这里提及，一位是前苏联的别列兹金娜（Э. И. Березкина），她于50年代把《九章算术》译成了俄文，并作了大量的注释，有些注释带有语体文“翻译”性质，本文75页，而注释则有71页之多[⑥]。另一位是日本的川原秀城，他翻译的《九章算术》（包括刘徽注）也加了不

---

① 1963年中华书局分上下两册出版。

② 白尚恕.《九章算术》注释. 北京：科学出版社，1983

③ 程大位著. 算法纂要校释. 李培业校释. 合肥：安徽教育出版社，1986

④ 胡术五，余幼龄，吴和俊，汪允锴，方竹荪，王杞. 勾股举隅释义. 合肥：安徽人民出版社，1959

⑤ 李冶著. 测圆海镜今译. 白尚恕译. 济南：山东教育出版社，1985

⑥ Э. И. Березкина, математика в девяти книгах, 439～513; Э. И. Березкина, Примечания к《Математике в девяти книгах》514 ～ 584，载《Историко-Математические исследования》，X，Москва，1957

少注释[①]。

其四是搜集和汇编文献。到目前为止，除了一些大图书馆和极少数私人藏书家外，很难在一个地方能比较集中地查阅中国古典数学文献，就是某些很重要的和较常见的资料也都分散各处，缺少像美国史密斯那样的工作[②]，没有把中国历史上数学的精华搜集在一起，汇编出版。有鉴于此，我们在本书中将引录较多的原始资料补上这一缺憾。还有一项与此类似但不完全相同的工作，就是搜集历史上那些有价值的数学资料，整理成册，出版发行，便于较多的人利用，此项工作现已有人着手进行。

其五是著名数学家著作集的整理和编辑。这是中国数学史研究中的一项重要工作，早期的著名数学家著作绝大多数都只有一二种，没必要搞什么著作集，惟有杨辉可以这样做，编辑《杨辉数学著作集》是应当的。能够编成著作集的主要是清代数学家，如梅文鼎、李锐、汪莱、戴煦、项名达、李善兰、华蘅芳、周达等，这已到了民国初年，再往后就多了。

其六是搜集数学文物与拍摄照片。有关数学的文物散在各地，甚至在民间也有，但是都不集中，就是文物照片有时也难找到。这项任务很难完成，不过可以分步骤进行，第一步是调查编目，第二步是拍摄照片，第三步是把照片整理成册。至于文物的搜集一般说是不容易办到的。还有，就是图像（如数学家画像和照片，数学家的集体照片等）的搜集也应着手去做。这里包括民族资料。

最后是音响资料的录制。这是研究中国现代数学史所必须完成的一项任务，应有计划地抓紧进行，实际上带有抢救的性质。

2. 探索研究。文献研究是整个研究的第一步，第二步是进行

---

① 川原秀城．刘徽注九章算术．日本：朝日出版社出版，见：科学の名著，2，中国天文学·数学集．1980

② D. E. Smith. Source book in Mathematics，Ⅰ，Ⅱ.　New York，1959

探索研究，即对文献做分析探索工作，从而提出看法，得出某种结论。探索研究是中国数学史研究的核心，是中心任务。这项任务可分为以下几方面：

首先是探索中国数学的特殊发展规律。根据史料弄清数学是怎样在中国发生和发展起来的，在漫长的发展过程中自然有些与外国不完全相同的特殊规律。需要做的工作相当多，已如第一节中国数学史研究对象那里所述的那样，这里不再重述。

其次是总结中国数学发展中的经验教训。在第二节中我们已经指出：中国数学史研究的借鉴价值中就有一项是经验教训。但是任何经验教训都是数学史工作者研究出来的。要完成的任务，包括国家的方针政策和数学家工作的得失两类，而这两类在许多情况下密不可分，因为个人工作的得失往往和当时的方针政策或者笼统一点说当时的国情有关。人们对于成功的经验自然给予了较多的关心，而且也是长期人们感兴趣的研究课题。然而失败的教训同样有很高价值，必须做为一项中国数学史的研究任务给予足够注意，认真完成。

其三是发掘教育性资料。这类资料虽然已经掌握一些，但是发掘和研究还很不够。任何一个在数学上取得成就甚至是作过研究而成就不大的某些人也有可学习的地方，例如清代数学家江衡有一女儿叫江熹（1882～1902）自幼酷爱数学，她在父亲指导下学习和研究数学，可惜的是只有二十周岁便突然病死，留下一批手稿，由家人整理成书出版①，无论如何对人有教育作用。

其四是发掘数学成果。这是几十年来人们关心的重点问题，如谁能发现一项数学成果就会受到称赞。此类发现到现在还在不断出现。由于人们认识的提高，对历史上的数学工作要进行重新评价，从而发掘出新的成果。因此，发掘中国数学史上的成果还有

① 江熹．西楼遗稿，一卷．光绪二十八年（1902）刊本。

很有很多工作要做，例如组合学、运筹学、统计学等方面的成果虽然已经有了一些工作，但是仍需要进一步去研究。

其五是探讨中外交流情况。中外数学交流问题是早已被人们所注意的问题之一，很多人在这方面有过很好的工作。但是时至今日，还有不少问题没有得到彻底解决，特别是中国数学对印度、阿拉伯和中亚、欧洲的影响有待于进一步深入探讨，要找到更多的直接证据。一般地说，这个问题的难度较大。可是，这是我们的任务，应争取早日完成。

其六是中外比较数学史的研究。这个领域与中外数学交流有某种联系，从概念上来看完全是两回事，纯粹的比较研究可以根本不涉及交流问题。主要是把中国传统数学与外国数学进行比较研究，以弄清各自的特点和优缺点，便于学习和借鉴。这种研究过去还很少，我们认为真正的研究开始是在1982年，这年的10月由《自然辩证法通讯》杂志社在成都召开了一次“中国近代科学落后原因”学术讨论会，会上有两篇论文属于这种研究[①②]，1983年沈康身有一篇关于中印数学比较的论文在国际会议上宣读[③]。做为个别问题的比较则有李迪关于《九章算术》与《几何原本》两书的特点[④]，何丙郁比较了秦九韶与卡丹诺的高次方程研究[⑤]。这仅仅是开始，需要比较研究的任务相当繁重。

---

① 乐秀城. 数学中的范式与结构. 见：科学传统与文化，西安：陕西科学技术出版社，1983. 221～238

② 胡作玄. 近代数学的引进与发展：比较研究. 见：科学传统与文化. 西安：陕西科学技术出版社，1983. 279～288

③ 沈康身. 中国与印度在数学发展中的平行性. 1983，第二次国际中国科技史讨论会，香港；中国数学史论文集（一），67～97

④ 李迪.《九章算术》与《几何原本》. 见：吴文俊主编.《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982. 105～119

⑤ 何丙郁. 中西数学家传奇. 见：中华文史论丛. 第一辑. 1985. 239～269

最后是关于少数民族数学史和地方数学史研究。少数民族数学史和地方数学史显然是两个不同的概念，但是有些地方就有紧密联系，甚至几乎是同义语，例如维吾尔族数学史与新疆地方数学史差不多是重合的。这两方面的研究，开始都比较早，不过在多数情况下没有明确概念，目的性也不很清楚。少数民族数学史作为一个概念容易形成和理解，而地方数学史则不然，因为它涉及的问题较多。李迪于最近提出地方科学史概念[①]，可适用于中国数学史。这两方面的研究易于深入，易于发掘出新资料，尤其是少数民族数学史研究是一项更重要的任务。

除以上所列各项之外，还有如数学教育史、数学思想史等等都是重要的课题，人所共知，无需赘言。

3. **完成论著**。中国数学史研究的成果，最终大都以论文或著作的形式公诸于世。这项任务是非常具体的。由于中国数学史料的丰富程度和研究范围的广泛，应当有多种形式的论著出现。

首先是要完成大型多卷本中国数学史学术专著。这是一项非常艰巨的任务，目前编撰的时机已经成熟，《中国数学史大系》就是在这种情况下被提到日程的。

其次是连续出版论文集。目前与几十年前相比，中国数学史研究论文显著增加，这就要连续不断地出版论文集，吴文俊主编的《中国数学史研究丛书》和《中国数学史论文集》就是这样诞生的。近年来也出版了一些不连续的论文集。还要继续编辑、出版这方面的论文集。

其三是编写教科书。近年中国在大学里开中国数学史的高等学校逐渐增多，需要各种教科书，目前虽然有一些篇幅不大的中国数学通史著作，也配备了习题，准备做为教科书用的著作，但是到目前为止还没有一种被正式列为教科书。因此，显然需要编

① 李迪．略论地方科学史．1986，陕西省地方科技史讨论会，西安。

写几种适合不同情况使用的中国数学史教科书。

其四是出版专题性的学术著作。关于专题中国数学史学术著作是指对某一专题进行深入研究而写成的著作，具有详细具体、较深入和问题集中的特点，如李俨的《中算家的内插法研究》一书可做为这方面的代表。在国外也有一些，如谢元作（John Hoe）、李培始（U. Libbrecht）和蓝丽蓉（Lam Lay Yong）等人的著作均可列为此类。就目前来说，此种著作尚为数甚少，但有待研究和应完成专题性学术著作的项目则相当之多。

其五是编辑数学家传记。中国历史上出现过一些著名数学家，由于资料的限制等原因，目前只有少数几个数学家有人给写了传记，其中如祖冲之、明安图等，多数的著名数学家还没人给写出像样的传记。我们这里所说的传记不是那种普及性的小册子，而是指有较高水平、包括作者研究成果的著作。像刘徽这样杰出的数学家由于传记性资料缺乏，要写出好的传记著作是有困难的。

最后是工具书的编纂。中国数学史方面的工具书不仅研究人员需要，而且也会给其他读者提供方便。例如中国数学大事年表、论文目录索引等都是很容易使人想到的项目。

4. 动态研究。任何研究都要了解国内外的有关动态，中国数学史研究也不例外。动态研究的目的主要为了避免重复他人的研究工作，及早掌握研究的大趋势，以制订有价值的、合理的研究课题。任何盲目的研究工作都可能产生某种失败，甚至最后完全废弃。就内容来讲大体包括两点：

其一是了解出版情况。动态研究首先就是要掌握已经完成的有关工作，了解论文发表和出版情况，而且要尽可能早的掌握，能找到亲自过目最好。如果能认真阅读一些有关综述性文章，将会有很大的益处。

其二是要了解他人正在进行中的主要工作。多数情况下，人们是不愿把自己未做完的工作公开出来，不过有些研究并没有保

密价值，一开始同行们就知道。

另外还要研究一些主要的中国数学史家，对于他们的研究工作、论著、学术观点等等都应有个基本了解。

第二章　中国数学史的研究方法与要求

怎样研究中国数学史，就是用什么方法研究，有什么应当遵循的原则和要达到的要求。这些问题是中国数学史研究中必须要考虑的，在方法、原则和要求方面提高一步。

第一节　中国数学史的研究方法

任何科学研究都有方法，有些学科的研究方法带有某些特殊性，中国数学史研究也是这样。但是，还要注意吸收新方法，不能守住已用方法而不改进。看来，在中国数学史研究中，引进新方法有较多的困难，可是必须克服困难使用一些新方法。

1. 传统研究方法。我们所说的“传统”是指从本世纪初起直到目前在中国数学史研究中通常使用的主要方法。其中最常用的有三个方面。首先是考证，这是多数中国数学家常用的方法，主要是解决史料本身的问题。李俨曾就1947年前的三十年中中国数学史研究做过总结[①]，其第四部分为“中算史料的考订”，比较详细地讲述了这段时期的考证工作。李俨在这里从四个方面举例加以讨论。第一，版本考订，他认为“研治旧史深重版本，诚以旧日刻本图书，较少鲁鱼亥豕之弊，借以校读往史，甚少遗误。”就是说，历史上的数学著作或有关著作，一般地说，越是年代较早的版本，越保持著作的原样；越晚越变样。书中的内容有抄错、刻错之处，需要考证。其次是史地考证，李俨举了不少实例说明这

① 李俨. 三十年来的中国算学史. 科学，1947，29（4）：101～108

个问题，如许商、祖暅等传记资料之补充，祖冲之之原籍等。对“宋元算学”的提法从史地考证的结果发现：“金人亦勤治天元”，祖颐《四元玉鉴》后序（1303）所提到的平阳、博陆、鹿泉、平水、绛、霍山等，在12世纪初到13世纪初在金的辖区内，而这些地方正是天元术流传最广的地区。李俨并未给出进一步的看法，但是根据考证的结果清楚地说明，只说“宋元”是不妥的。第三是语文考证，他说：“中国学术与国外关系至密。即以中算而论，汉唐以来，深受佛教影响；宋元以来，深受伊斯兰教影响；明清之际，深受天主教影响；而佛教徒的西域天竺文字，伊斯兰教徒的波斯，阿拉伯以及土耳其文字，天主教的拉丁、英、法、德、意、葡、西各国文字，都关于治史。”还举“西域”仪象和《元秘书监志》所载“回回书籍”为例说明语文考证问题。最后是一般考证，李俨指的是上述三个方面之外的考证，列举了《夏侯阳算经》的成书年代等例子。李俨没有进一步阐述如何进行考证。一般的考证方法主要是文献追踪，就是从要解决的问题入手，一步一步地查找文献，目的是寻找有助于解决问题的资料。有的问题需要追踪的不是一个方向，而是好几个方向，形成一个放射式的追踪路线网。最后把追查到的资料进行综合，得出结论。在考证中，有一大类问题是要确定某一事件的年代，所用方法可称之为“逼近法”，就是把年代的上、下限逐步靠近，使问题得到解决。中国数学史研究中的考证，多数情况下还要考虑“数学”这一重要因素，即从数学内容上进行考证，如名词术语、算法、数学思想、数据、定理等等。

第二种传统研究方法是“翻译”和算理分析。“翻译”就是把古代的数学变成现代的形式。众所周知，中国历史上的数学，直到19世纪中期还与现代形式完全不同，越是时代早的与现代形式的距离越大。北宋以前的数学著作除汉文数字可一眼理解字面意义外，其余都不那么明显，而且全部是文言叙述，连定理、法则、

公式也都是一片文字。从宋代开始虽然有了较详细的演草，但又缺少数学符号。因此，数学内容的表达始终没有一种显眼的形式，看起来十分困难。数学史工作者为了弄懂数学著作的内容，常常要进行大量“翻译”工作，把历史上的数学用现代形式表达出来。这本身就是一种研究，但它又是一种方法，是“翻译”方法。从本世纪初开展中国数学史研究以来，不论是中国学者还是外国学者都使用这种方法，直到现在。用这种方法研究的结果，使人一目了然。看上去就像是现代数学。如果中国数学史研究不使用“翻译”方法，那么结果是什么样子就不难想象了。与“翻译”相伴的是算理分析，即从数学内容本身进行研究，即对具体算法、逻辑论证、概念、理论间的联系，它们的涵义等。无算理分析的“翻译”，达不到应有的水平，有时也无法进行。

第三种传统研究方法是直陈，就是把资料按照某种顺序加以排比，用以说明某种事实或现象。在大多数情况下，都是按时间先后顺序处理资料。如果是写一篇文章，那是比较容易的。假如要研究一部明代的数学著作，就依次按卷进行，然后再按卷的次序加以整理。“直陈”法就是一种比较自然地研究方法，有现成的标准可以利用。这种方法主要用于写作上，而且用的很广。

此外，还有比较法，就是把中国历史上的数学成果与外国相同的成果进行比较，特别是成果提出的时间先后、有无联系、方法的优劣、成果的水平高低等等。

上述各种传统研究方法并不是孤立的，它们之间有密切联系，而且往往同时使用几种方法。在一些具体研究项目中，可能以一种方法为主，其他方法为辅，只用单一方法的研究很少。

这些传统的研究方法，虽然已经使用了七八十年了，但是到现在仍被大多数研究者所使用，在短时期内不可能被摒弃。

中国数学史研究和其他研究一样，其方法也应当不断革新，把别的学科的有效方法（适合于数学史研究的）引到中国数学史研

究中来。方法的作用是极其重要的，往往由于方法的不同对同一问题的研究会产生不同的结果。新方法的使用和推广，在中国数学史研究中肯定会取得好的效果。

2. 数量法。顾名思义，数量法就是用数量的方法研究中国数学史，也就是用数量的方法处理和表达中国数学发展的一些规律性问题。用这种方法研究出来的结果，一般来说精确程度较高。根据表现形式，数量法大体可分为五种类型。第一种类型是用数学公式或逻辑符号表现研究结果的公式法。这种方法的要点在于对数学史的研究给出定量的逻辑定义。众所周知，大多数自然科学和逻辑学等（如数学、物理学、天文学、数理地理学、形式逻辑、数理逻辑、化学等等）都能够给出定量的逻辑定义，用数学公式或逻辑符号表达是理所当然的。数学本身在两千多年前开始尝试使用公理法，对定量的逻辑定义产生了深远影响。后来许多科学研究采用了类似的方法，例如人们所熟悉的英国科学家牛顿（I. Newton，1642～1727）在力学研究中就有明显的表现[①]。他的三大定律和许多有关力学的定义很容易变成数学公式或逻辑符号。在这方面，近几十年来仍在发展和推广，1957 到 1958 年美国加利福尼亚大学伯克利分校的一次讲习班(symposium)就是明显的例子[②]。数学史研究（包括中国数学史）未必能完全做到这一点，因为数学史本身的特点，其规律性不可能像自然科学和逻辑学那样精确。这样，在数学史研究中进行定量的逻辑定义当然有一定困难，给数学史建立一套公理法也不一定必要。尽管如此，定量的逻辑定义在数学史研究中仍然可行，而且应当积极试用。很显然，

① 牛顿. 自然哲学之数学原理. 郑太朴译. 北京：商务印书馆重印第一版，1957. 21～44

② L. Henkin and other (editors). The Axiomatic Method with special reference to geometry and physics。AMSTERDAM，1959

有了定量的逻辑定义就可以轻易地把相应的数学发展规律用数学公式或逻辑符号表达出来，就是运用数学方法或逻辑方法描述出了数学发展的某些规律。这种研究方法，一般地说适用于宏观课题，微观性的问题不太适用。

第二种类型是统计方法，其研究结果的主要表达形式是具体数字。在数学史研究中需要用统计方法的方面比较广泛，而且较易使用。例如对数学成果的统计、数学著作的统计、数学家的历史分布和地理分布、数学家的师承关系和互相影响统计等等。为了更好地使用统计法，必须对所涉及到的问题进行技术性处理。就拿“数学成果”来说，不同的成果在重要性和水平上有时可能相差极大。例如中国历史上的“开方”术和“大衍求一”术的水平是一样的吗？《九章算术》中的“方程”术和“勾股容圆”术都是世界记录，但是它们的历史地位不能放在同一水平线上。同样是数学家的历史人物，如祖冲之和甄鸾、刘益和秦九韶、李善兰和黄宗宪等等都有很大差别，他们的成果的数量和质量都不相同，他们的历史地位也相差甚远。如果不加分别地进行统计，那么所得结果一般来说是粗糙的。解决这个问题的唯一办法是把统计对象按照某种客观标准分成等级，每个等级的对象赋于一定的量值。当然，并不是对所有的统计工作都要这样做，例如某个时期内某个地区出现了多少名数学家，只要划清数学家和非数学家的界限就行。定义仍是统计法所需要的，有了定义能更好地进行统计。对于数学成果的统计，即可定义“密度”这一概念，定义为：在单位时间（如一百年）内中国取得的数学成果的项数，就叫做某单位时间内中国数学成果的“密度”，简称之为“密度”。在把成果按等级处理时，还可给出进一步定义。

第三种类型是坐标方法，其表达形式是曲线。这种方法的关键是要取得一组数据，而这些数据往往和年代相联系，因此构成一组数对，把这些数对与一选定的直角坐标平面上的点相对应，找

到这些点用平滑曲线连接，此曲线便是所需要的表达形式。坐标法在科学史研究中早已有人使用，如李约瑟就在中国科学史研究中使用过，他“非常审慎”地画了一幅“中国与欧洲发展世界性科学之贡献——中国科学交流期与融合期的分类示意图”[①]，其中的曲线似乎不是严格按坐标定点、连接而得，而是带有一定的自由性。李迪在中国科学技术史学会成立上也曾提倡采用此法研究中国科学史[②]。不久，金观涛等则大量使用坐标法处理中国科学史问题[③]，等等。但是在中国数学史研究中，到目前为止还很少有人使用这种方法，我们认为应当积极推广使用。使用坐标法有一个最大的困难，就是纵坐标的取法不好定标准，实际上可以根据不同的问题分别决定标准单位线段，然后确定纵坐标。横坐标往往和年代相联系，以年代为横坐标轴就非常方便。纵坐标和横坐标的单位应取得比较合适，即两者配合得当，作出的曲线才匀称、变化明显。

第四种类型是图形法，这是人们熟悉而较常用的方法之一，方法的要点是根据一些数字画成图形。实际上图形法是统计法的一种表现形式，在使用上有较大的灵活性。这种方法的表现方法大体有两种，一种是用矩形的高度表示数量的差别，例如在不同的年份把统计结果在同一底线上画出一系列矩形，根据矩形的高低就反映出不同年代被统计对象的发展情况。一种是用圆面上的扇形表示数量的差别，百分比常用此法。在科学史研究中，图形法用的还不多，中国数学史研究还未见到有人使用。用图形法研究中国数学史，显然有一些好处，能从形象上更清楚地反映某种史

---

① 胡菊人. 李约瑟与中国科学. 时报文化出版有限公司，1982. 33～34

② 李迪. 中国科学发展的水平运动. 中国科学技术史学会成立大会，1980

③ 金观涛，樊洪业，刘青峰. 文化背景与科学技术结构的演变. 西安：陕西科学技术出版社，1983. 1～81

实，能更确切地说明有关问题。

第五种类型是表格法，就是用表格表示某一类事项，或数字。用途非常广泛，但是并不全涉及数量，或间接与数量有关，例如次序等。表格法的优点是：能把一些很分散的资料、数据集中在一个表格中，从而能清楚地看出某些问题，进行比较，并得出相应的结论。在数学史研究中应用此法的不乏其例，就中国数学史研究来说也有人使用。例如李约瑟在其著作中把中国历代记数符号十种列表，即标准近代体、会计体、商代甲骨文体、青铜器与货币体、周代货币上发现的别体、筹算体、后期筹算体和商业体[①]，还有一个表收入商代甲骨文与周代青铜器铭文中大于 10 的数字记法[②]。李迪在从 19 世纪西方微积分学传入中国之初李善兰（1811～1882）与伟烈亚力（Alexander Wylie，1815～1887）所定的 330 个英文数学名词的中译名中选出一批用表格法列出[③]。这些表使人一目了然。不过，使用的还不多，还不普遍。

3. 模型法。“模型法”（Method of Model）是一种意义很广和应用普遍的方法，它的定义也是多种多样的。为了明确起见，我们在这里先引述一些有关模型的定义，而这些定义都是近年来提出并在中国有一定流传。G. S. Holister 说：“为了意释一件众所周知的工作：‘一开始是言词——而言词就是一种模型。’更确切地说，言词是我们新发出的一个声音或写下的一个符号，用来表示某个客体或概念，或确切点说是我们对该客体的精神映像或概念。因而从一种十分真实的意义上说，我们所使用的言词乃是模型。”“在科学中，这种模型方法程序乃是我们所说的‘科学方

① 李约瑟. 中国科学技术史，第三卷，数学.《中国科学技术史》翻译小组译. 北京：科学出版社，1978. 12～13，30

② 李约瑟. 中国科学技术史，第三卷，数学.《中国科学技术史》翻译小组译. 北京：科学出版社，1978. 12～13，30

③ 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 354～355

法’的核心。”[①]Jacobsen从数学的角度指出：“一开始我们所具有的是一个自我支配的符号系统；只有当这些符号与现实世界中的事物同构时，才产生意义”，他还认为“一切模型方法都存在有一种数学基础”[②]。把模型“作为塑造实在的工具”[③]是又一种看法。B. Sendov给“数学模型”下了一个这样的定义：“数学模型可说是一种其‘材料’具有数学性质的模型”，又说：“数学模型本质上不同于一般模型，因为它们适用于用数学工具进行操作。”然后举出“物理学及其他科学中的数学模型”，例如万有引力定律就是“一个典型的数学模型，以古典的数学方式对它进行操作，就可以产生出相当于对客观实在的许多有关方面的极端精确的预言和解释的结论。”[④] 由此可见，数学模型是非常具体的，定律、公理、定理、公式等等都是数学模型。

对于模型应有最起码的一些要求，主要的有两条：第一条是与事实相一致；第二条是能作出预言。很显然，任何研究工作，其直接的目的就在于说明或解释客观事实、探求自然规律，其研究方法必须尽量符合客观，否则是没有意义的。根据模型进行预言，是一个必须提出的要求，能预言，甚至能准确预言，就是一个好的模型，同时说明它与事实的一致性（当然是相对的）。两条要求有密切联系。

科学史研究有必要与可能使用模型法，已有的例子如T. S.

---

① G. S. Holister. 赞颂模型方法. 吴忠译. 科学对社会的影响（中文版），1981，31（4）：3～6

② Jacobsen. 论逻辑、公理、定理和证明. 吴忠译. 科学对社会的影响（中文版），1981，31（4）：11～13

③ 科学对社会的影响（中文版），1981，31（4）：封面和封底

④ B. Sendov. 数学模型方法的一些原则. 郑器译. 科学对社会的影响（中文版），1981，31（4）：14～17

库恩的科学革命的结构理论[1]就是一个典型的模型。近来在中国数学史研究中实际上也有人使用过模型法，只不过往往没有明确意识到罢了。我们认为在中国数学史研究中应从不自觉地转变成自觉地使用模型法，建立中国数学发展的各种模型。

研究方法是多种多样的，而且是发展变化的，新方法也会不断出现，我们这里所讲的仅是一部分，研究者应自己选择或创造更好的方法。

第二节 对中国数学史研究的要求

为了更好地研究中国数学史，应当对研究工作本身提出一些必要的要求。目前还很少有人明确提出这个问题，但是任何研究者都会有自己的要求，而每个研究者由于研究课题的不同，目的各异，要求自然不能一样。不过，应当有一些适合于多数情况的较一般的要求。

1. **力求保持中国传统数学的原貌**。直到19世纪末的中国数学，在有文献可查的几千年中，虽然经常在发展变化，可是一直保持着“中国的”样子，有自己的思想方法。中国传统数学的形式和现在通用的形式差别甚大，就是西方数学传入中国后，在一段较长的时间内也基本上是传统的样子。因此，中国数学史研究应当力求保持原貌，不要走样太远，把历史上很久以前的数学给“现代化”。

首先要力求保持形式的原貌。既然中国传统数学长期保持中国形式，那么中国数学史研究就应当特别注意这个问题，不能把历史上的形式完全变成现代的形式。例如一二千年前的数学运算

① T. S. 库恩. 科学革命的结构. 李宝恒，纪树立译. 上海：上海科学技术出版社，1980. 1～144

用阿拉伯数码和运算符号、性质符号等连接起来，现在人看起来清楚、易懂，可能有人以为原来就是这个样子。其实是大错特错了，阿拉伯数码到19世纪末期才在翻译的数学书中使用[1]，等号等用的较早[2]。一般说来，多数人对前人的成果不致有何误会，可是对于原貌则毫无所知。

其次是力求保持思想的原貌。历史上的数学家对数学的认识、理解和现在的人们不大一样，有时甚至是全然不同。这一点不论是大问题上还是在细小问题上都是如此。研究者在两个问题上要特别注意，一个是保持前人的原意问题，不能把前人的意思弄扭了，例如卦爻的阴爻和阳爻两符号配合排列成八卦、六十四卦，本无二进制的意思，用二进制解释是可以的，如果说两三千年以前的古人已经认识了二进制或说八卦就是二进制，这是研究者强加给古人的想法。另一个是把前人的认识不适当的"拔高"，原来只是一种经验性的，甚至是偶然的看法，往往被说成是有理性的，普遍的认识。我们主张古人认识到什么程度，就承认到什么程度，做到不"拔高"也不"压低"。

第三是力求方法保持原貌。中国传统数学的方法多与现代数学的方法不同，这是由于形式、思想、使用工具以及其他因素所决定的。中国历史上长期使用算筹，后来改用算盘，因此擅长计算方法，绝大部分方法都是以是否适合筹算和珠算为转移。根据筹算的特点，计算需要有一定的程序，这种程序必须具有一般性才能适合某一类型数学问题的解决。按照一定的程序摆筹解题。程序的获得过程，按程序解题，摆放算筹等都是方法。中国几何问

---

① 早期的翻译书中都把阿拉伯数码改成了中国数字，直到19世纪70年代仍然如此。

② 在《数理精蕴》(1723)中使用了等号，也用了加号"+"和减号"−"，但是在后来的一百三十多年中没有得到推广。

题也大都转化为计算问题，其中有一大类问题是通过直角三角形（勾股形）或转化成勾股形来处理。绘制几何图形应当用古代的规矩，而不应使用现代的尺规。

最后是力求术语保持原貌。早期的中国数学术语有些和现在的一样，如正负数、约分、通分、圆等等；也有许多不相同的，如长方形叫做“直田”，直角三角形叫“勾股形”，分数加法叫“合分”等等。研究者应注意这个问题，在论著中尽量使用原来的术语，而避免术语的“现代化”。

要想在中国数学史研究中完全保持原貌是困难的，可以说是办不到的，有时也不一定非要这样做不可（例如写一本通俗的小书），但作为中国数学史研究那就必须提出这种要求。

2. 研究者要掌握古算技术和造术方法。由于前一项要求对研究者自然提出另一项要求，就是自己应当掌握古算技术和造术方法。如果这两点没有掌握，想在中国数学史研究中保持原貌是不可能的。由于这问题本身的难度太大，到目前为止，还很少有人能真正掌握，尤其是造术方法尚在探索中。

首先是掌握古算技术。所谓“古算技术”，具体地说，就是指的筹算技术。中国数学史研究者都知道中国历史上长期使用算筹进行计算，从而形成一整套计算技术。研究者应当掌握这套技术，能够用筹进行计算，虽然不能要求达到像宋代卫朴那样“运筹如飞”[①]的程度，但是至少应当会用，能计算出结果来。要做到这一点殊非易事，简单的算术运算以及分数的表示和运算一般说容易，假如解一道“大衍求一术”之类的题目就有一定困难，要是解一个10次方程或者“四元术”问题等就更难了。主要的难处在于古书上没有详细记载，所有的数学书都有计算程序，还有一些有细草，甚至细草写的特别详细，如秦九韶的《数书九章》就是如此，

---

① 〔宋〕沈括. 梦溪笔谈，卷十八

可是都没有讲述筹是怎样摆的。《孙子算经》所讲仅及乘法和除法，他书则极少正面讲述这个问题。研究者只有真正掌握了筹算技术才能算精通了中国传统数学，在这情况下研究出来的中国数学史也才能更接近原貌。

到了明代，珠算代替了筹算，多数计算全用珠算来完成。珠算直到今天还有实用性。这就要求中国数学史研究者会打算盘，不仅要会按照现在的方式方法打，而且应当掌握几百年前的珠算技术。明末西方的笔算传入中国，逐渐被一些中国学者所采用，还有一定发展。但是这种早期的笔算与现在通用的笔算有诸多不同，研究者也是应当掌握的。乾隆前期，明安图研究“割圆连比例”，论证无穷级数，用到了三十多位的数字，他的计算方法应当熟悉。

要想对中国数学史研究得好，能够真正而透彻地理解传统数学，就要求研究者掌握以筹算为中心的包括早期珠算和早期笔算等在内的古算技术。

其次是掌握造术方法。中国传统数学的定理和演算程序都是以“术”的形式出现，按照术的步骤解题。用现代数学理论来衡量，绝大多数的术都是正确的，有少数是近似的，完全错误者极少。这些术是怎样建立起来的呢？在流传至今的早期数学著作中很少有对术的论证，只有刘徽的《九章算术》注等论证了术的正确性，指出了某些术所存在的问题。赵爽的工作中也有些属于这种性质。不论前人是否讲述了造术方法，研究者却是应当掌握前人是如何造术的。如果这个问题不解决，我们对传统数学的认识只能停留在“当然”的水平上，而不知其“所以然”。很显然，如果掌握了古算技术，对于造术研究大有好处。

对于造术问题，前此已有些人进行过研究，有些研究是无意识的，例如有人补证古代的某种术就带有造术性质；有意识的研

究已有很长一段时间，但是使用“造术”一词似从白尚恕起[①]，近年来的研究有所增多，而全面、系统的研究还未见公开发表。造术必须符合古人原意，而不是用现代的某种方法给予解释，把今人的思想强加给了古人。实际上造术就等于把古算复原，要达到复原的目的必须按照一定的原则去进行，这一点将在下节详细讨论。

最后是要掌握绘图技术。数学离不开绘制图形，而中国历史上的绘图技术与西方的有所不同，主要的不同在于工具。西方用直尺和圆规，而且在使用上有严格规定；中国的规和矩是什么样子尚不能完全确定，目前多数人都认为矩是带刻度的直角拐尺，而对规则论者甚少，李迪曾提出一种看法，即明代《三才图会》中所画的那种规[②]。用中国的规、矩画图与用西方的尺、规画图有很大差别，研究者不仅应当知道其差别，而且应当会实际操作。在中国历史上常作的图形都是由圆（及其部分）和线段所组成，大都考虑的是度量问题，因此注重大小，这和西方主要是研究图形的性质有很大不同，操作的区别也就在这里。

3. 要力争真实。真实是任何科学研究所必须要求的、不言而喻的问题。但是像中国数学史这样的领域，要做到完全真实有极大的困难。不过，我们应当力争做到这一点，把中国数学史写成信史。为此，应在以下几方面争取做好。

首先是要求结论正确。我们不主张没有任何结论的中国数学史，因为那样的中国数学史没有给别人什么明确的东西，大部分甚至全部结论都要由别人去得出，研究任务没有全部完成。由于中国数学史研究涉及到的因素较多，如果考虑不周或者在某种因

---

① 白尚恕．秦九韶测望九问造术之探讨．见：宋元数学史论文集．北京：科学出版社，1966．290～303

② 李迪．我国历史上的一种圆规．见：中国数学史论文集（三）．1987．55～57

素方面产生误解，就导致了结论的错误。这是研究者必须认真对待的问题。

其次是评价要公允。在中国数学史研究中不可避免地要对历史上的数学成果、数学思想方法、人物、著作、有关政策和事件等做出评价，例如“世界第一”、“杰出数学家”、“重要著作”等等都是评价性语言。说评价性的话很容易，而要做到公允是较难的。对于整个中国传统数学究竟应给予何种评价，多年来分歧很大，中国人评价一般说偏高，这有两个原因：第一是中国人更容易理解自己国家的遗产；第二是多少有民族感情在起作用。外国人由于受文字的隔阂对中国传统数学能了解得比较深刻的人为数极少，有个别人持否定的态度，如美国的克莱因（M. Kline）认为中国数学“对于数学思想的主流没有重大的影响。”[①]更早的如英国的鲍尔（W. W. R. Ball）认为中国在数学中从来不曾得到任何有价值的成就，所掌握的数学知识是从希腊传进中国的[②]。类似的说法还可找到一些。也有的外国人把中国的数学成果引申得很远，以致铸成大错，时至今日还有人重复说中国在2500年前就验证过当 $a=2$ 时的费尔马定理的逆定理[③]，就是一个典型的例子。

评价一般说不是一成不变的，往往会随着某种因素的变化而改变，原来认为公允的评价变为不公允，或者不公允的反而变成公允的。因而我们所说的公允与否基本上都是有时间性的，只有少数的评价可能不会改变，如上面所说的费尔马定理的逆定理等。

---

① M. 克莱因. 古今数学思想. 第1册. 张理京等译. 上海：上海科学技术出版社，1979. 作者序

② 李约瑟. 中国科学技术史. 第三卷. 数学.《中国科学技术史》翻译小组译. 1978，北京：科学出版社，1978. 1～2

③ 亨斯伯格（R. Honsberger）. 一个古老的中国定理及Pierre de Fermat. 江嘉禾译. 数学译林，1982，1（3）：291～295

对于人物和思想方法等方面的评价最难作到公允，因为人物等所涉及的问题太复杂，例如秦九韶这个人物，人们对其数学成就的评价都是肯定的，只有偏高、偏低之分，对其人品的评价差别就太大了，例如李约瑟没有说他人品不好，而说他“必然具有迷人的性格”，在恋爱方面，“他的声誉同阿维森纳（Avicenna）不相上下”[①]。钱宝琮认为秦九韶“‘喜奢好大，嗜进谋身’。私人品行也极恶劣。”[②] 两人的评价相反。

其三是引用资料要可靠。实际上这是一个常识性的问题，可以说研究者都懂得，不过真正做起来并不那么容易，有些不正确的结论就是由于引用了不可靠的资料造成的。研究中国数学史和研究其他历史一样，引用的资料一定要可靠，要做到可靠必须亲自过目每一项资料。不亲自查阅所引用的资料，往往要出问题，即使查阅了还要弄懂，引用时也不要断章取义，特别是在引用时删去了不利于自己已有想法的部分更不应该。还有更糟的研究者，他们只是想当然地下了结论，根本没去找资料。例如前面提到的那个关于 2500 年前中国人验证过当 $a=2$ 时费尔马定理的逆定理的例子，是由于引申在西方造成了错误，长期来互相引用，但是没有人去核实资料，以致到不久前仍在著作中出现。严敦杰早已指出了这个问题以及造成错误的根源[③]，大约是由于文字的关系，在西方没有起到应有的作用。

最后是可以适当建立假说。力争做到真实，并不排斥假说。假说是科学研究中不可缺少的部分，中国数学史研究也不能完全不要假说。有些问题离开假说绝对不行，如《九章算术》的成书年

① 李约瑟. 中国科学技术史. 第三卷. 数学.《中国科学技术史》翻译小组译. 北京：科学出版社，1978. 89～90

② 钱宝琮. 秦九韶《数书九章》研究. 见：宋元数学史论文集. 北京：科学出版社，1966. 60～103

③ 严敦杰. 中算家的素数论（续）. 数学通报，1954（5）：12～15

代迄今没有找到足资证明的材料，可是研究者总得把它安置在某一段历史时间内，并且同时还要讲一些理由，这就是假说。在中国数学史研究中，这类问题经常会遇到，而且必须予以处理。假说也要有一定的根据，例如今本《周髀算经》中有“吕氏曰”，赵爽注称：“吕氏秦相吕不韦，作《吕氏春秋》”，由此推知，该书的年代当在吕不韦之后，绝不是信口开河。假说并不与真实性的要求相矛盾，研究者要善于建立假说，促进中国数学史研究的进展。

4. 注意多民族性。中国是一个多民族国家，历史上除汉族外有匈奴族、鲜卑族、羌人、女真族、契丹族等等，现在全国有 55 个少数民族，共约有 5580 万人，人口在 100 万以上的有 13 个民族，壮族有约 1200 多万人，在少数民族中人口最多[①]。这些民族和汉族一起形成了一个统一的中华民族。光辉灿烂的中国科学文化就是中华民族的所有成员共同创造的，因此在中国数学史的研究中必须注意多民族性这个重要问题。

首先，我们必须在认识上把这个问题放在重要位置上，每个民族都是搜集数学史料的对象，是数学史研究的宝库。在这方面，过去虽然有过一些工作，但是做得非常不够，实际上连表面上的工作也没有做完。例如有文字的少数民族的数学著作或译成少数民族语言的著作到现在也未有详细的调查报告，散在各地民间的数学文物同样没有较全面的了解，已经发表出来的资料仅是一点点[②]，一些民族口头传授的数学知识、语言中的数词等我们都不太清楚，满族数学家伯启的汉文数学著作（抄本）直到现在才有人认真研究[③]。就是说，需要调查、搜集和发掘的工作很多，少数民

① 《中国少数民族》编写组. 中国少数民族. 北京：人民出版社，1981. 2

② 例如李家瑞的调查报告：云南几个民族记事和表意的方法. 文物，1962（1）：12～14

③ 那日苏. 伯启对勾股形内容三事的研究. 内蒙古师大学报（自然科学版），1986（2）：43～48

族的数学史料十分丰富，要求中国数学史研究要充分注意这个问题。

其次是少数民族数学史料包括着不同层次的内容，其中有一些在汉族地区无法找到的资料恰好弥补了中国数学史研究中的空白，最有代表性的资料之一是结绳记事（数）的实物。众所周知，中原汉族地区只有传说性的历史记载，实物早已不复存在，可是有些个别的少数民族现在还用结绳的方法记载羊数，新疆巴里坤草原的牧民用羊毛结绳[①]。这类资料可以说是活生生的，十分珍贵，在中国数学史研究中很有价值。当然，其他资料同样重要，例如藏族的计算法等等都是很有价值的资料。

最后我们还要从中外交流方面来考虑这个问题。由于地理等因素，少数民族在中外数学交流方面起过特殊的作用。少数民族多居于边疆地区，有更多与外国人接触的机会，在接触中自然要互相学习，民间流行的数学知识便得到传播。有的少数民族如回族原来是从中亚、波斯和阿拉伯等地区来到中国的工匠、商人、学者、官吏、掌教等逐渐形成的，也有一部分汉族和其他民族变成了回族。很显然，回族肯定会把原居住地的数学带到中国来。元代时回回学者把西亚的天文历算和医药等知识传到中国，阿拉伯文数学书收藏于元代的北司天台，蒙古统治者蒙哥还懂得一些欧几里得几何学，阿拉伯数码幻方也在十三四世纪流行于中国，等等。这都是人所共知的事实。我们在这里提出，是强调少数民族的作用。少数民族不仅把外国某些数学知识传到中国，而且同样地也把中国的某些数学知识传到了外国。

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．10

第三节 研究中国数学史应遵循的原则

根据中国数学史的定义和对于研究的要求，必须制订一些基本原则，在研究中予以遵循。制订原则的目的主要是为了保证研究质量的提高。

1. **史论分离原则**。众所周知，所谓“史”是指史实，“论”是研究者对史实的看法，两者在历史研究中存在着一定联系，而又是不同的两回事。史论分离原则是为了防止“以今代古”，把历史“现代化”。在中国历史上，2000年前的伟大史学家司马迁（前145～?）已经开了史论分离的先例，他在《史记》中加了许多“太史公曰”，这就是“论”，其余的都是“史”。清代的阮元（1764～1849）也是用这种原则编写《畴人传》的，在叙述了每位畴人的事迹（史实）之后，加了一段“论曰”，就是他对各位畴人的看法和评论。“史”和“论”分得清清楚楚，可以说相当严格。对于这一原则有两个问题需要进一步说明。

首先是司马迁和阮元的作法已经过时。如果我们现在出版的一部中国数学史著作，仍然采取《畴人传》那样的作法无论如何也行不通，事实上早已改变。从20世纪初开始的中外学者对中国数学史的研究中就已抛弃，不过有些研究者并没有认真考虑“史”和“论”的关系问题，结果是“史”、“论”不分，实际上有的变成了以“论”代“史”，原来的面貌几乎完全看不出来。我们认为不论研究者采用何种形式，只要人们能够把史实和研究者的看法区别开来就可以了。

其次是“史”中不可能绝对没有“论”。我们所说的“史论分离”只能是相对的，即使是在研究中引用的原始资料也有研究者的观点在其中。因为很显然，引用资料就有观点作指导，或者可

以说资料有时是为观点服务的。至于不引用原始资料而由研究者叙述的史实，更是掺杂着研究者的观点。正因为如此，“史论分离”原则更加必要，必须大力提倡，否则研究出来的是被扭曲了的中国数学史而不是真实的中国数学史。

最后还要补充一点，“史论分离”的“史”不是指大段大段地摘抄古书，其实这样做未必就是史实，因为把大量历史资料拼凑起来往往更加不易说明历史问题。这就很自然地应当有“历史性”原则。

2. 历史性原则。这条原则是说中国数学史研究必须具备历史性，就是各个时代的中国数学要符合各个时代的特点，符合历史实际。前面讲的史论分离也是这个意思，指的是符合时代的“史”，而不是各个时代都适用的“通史”。吴文俊曾提出“古证复原三原则”[①]，就是历史性原则的例子，它们是：（1）证明应符合当时与本地区数学发展的实际情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法；（2）证明应有史实史料上的依据，不能凭空臆造；（3）证明应自然地导致所求证的结果或公式，而不应为了达到预知结果以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。这三原则可以推广，使之适用于更大的范围和更多的情况，变成历史性三原则。

第一原则：对历史上的数学所做的说明或补充证明应当符合当时与本地区数学发展情况、社会情况，而不能套用现代的或其他地区的数学成果与方法以及社会情况。

第二原则：对历史上的数学所做的任何补充说明或证明应当有史实史料上的依据，而不能凭空臆造。

第三原则：对历史上的数学所做的任何补充说明或证明应当

---

① 吴文俊.《海岛算经》古证探源. 见：《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982. 162～180

是自然地导致某种结论或导致所求证的结果或公式，而不应为了达到预想结论以致出现不合情理的人为雕琢痕迹。

这样一来，三原则仍然适用于古证复原问题研究，也适用于任何造术问题或更广泛的问题的研究。

3. 中外区别原则。数学做为一种研究空间形式和数量关系的科学，其结果无非是对客观规律的说明或描述，数学研究成果是数学规律在人的头脑中的反映。因此，其最基本的内容不论在任何国家或民族都一样。但是在处理方法上、计算工具上、解释上等等可能存在很大的差异，如进位制，在早期不仅有六十进位制和十进位制，而且北美的玛雅人则采用二十进位制。中国传统数学与外国数学相比较，也存在着这种差别，有些外国有的数学理论、方法中国没有，也有些中国有的数学理论、方法而外国没有，应当实事求是地对待，有就是有，没有就是没有。根据这种情况就要制订一些原则予以遵循，主要是用于外国有而中国没有的诸方面。

首先是不能认为外国有的中国一定有，也不能强把中国某项数学理论或方法说成是和外国一样的数学理论或方法。实际上，在以往的研究中经常有人违犯这一原则，如把“重差术”说成是“中国的三角学”。“重差术”在一定程度上起平面三角的作用，用三角给予解释尚属勉强，说成“是三角学”那就成问题了。

其次是不能用外国有而中国没有的数学知识解释或说明中国数学问题。中国数学史研究中有大量的问题需要解释或补充说明，而解释和说明时所用的知识是研究者最熟悉、最方便的西方数学知识，此乃常情。例如在几何中很容易想到引平行线，在某些计算中很容易想到设x，等等，实际上中国早期数学中没有引平行线的作法，到了“天元术”才有了“立天元一为某某”的话，相当

于“设 x 为某某”，以前是没有的[①]。所以在这类问题上，应当时加小心，否则就会出现“中算西化”的现象。

最后是不能完全以西方的数学为标准评价中国数学。有些内容中西不可比，很难在差不多同时东西方找到相近的数学成果，例如筹算就是个典型，在西方找不到相对应的东西。因此无法用西方数学来评价筹算，只能独立地给出评价。

4. 历史与逻辑统一原则。在中国数学史研究，特别是撰写著作时总要考虑两个问题：第一是使内容符合历史发展的顺序；第二在安排上要符合逻辑，即符合某种内在的联系。最好是把这两个问题结合起来，在作法上予以统一。我们把“统一”定为一种原则是因为如果不这样做，写出来的书甚至文章都有可能条理不清，杂乱无章，历史感不强或完全消失。

---

① 西方在 17 世纪开始用 x 代未知数，到 19 世纪前期在中国尚未普遍采用，从 1859 年起在翻译西方的数学书中改用“天”代未知数。

第三章 中国数学史的分期

中国数学史的分期是中国数学史研究中的重要课题之一，特别是像我们这样的大部头著作尤其需要对这个课题进行探讨，现提出我们的看法。

第一节 分期举例

关于中国数学史的分期问题早已有人注意到，并提出种种分期方案。我们找到的至少有六种，现分述于下：

1. 三上义夫的方案。40年前，三上义夫（Y. Mikami，1868～1950）在其所著《中国算学之特色》（1926）中有专门一章讨论分期问题，他认为应分四期或五期。三上义夫的分法是把数学最发达的几个历史时期单独提出来立为数学时期。《算经十书》成立之前为第一时期，约当西汉末以前；《算经十书》成立过程为第二时期，约当汉唐时代；南宋到元代（即1247～1303）为第三时期；自明末到他所说的“现代”为第四时期，但是他接着说：“至清末以来，则视为形成第五期，亦无不可。”

三上义夫对自己的分期方法做了不少解释，关于第一期和第二期，他说：《算经十书》“大概为前汉末或后汉初至唐代之著作，大体上可以代表汉唐时代之算学。然《算经十书》之著作之前，亦不能谓算学不发达。以前之算学，虽无算书传世，而其发达之状态，尚不能谓为不可知。如根据断片史料之散见于各书者，其发达之状态，不难想象得之。故古代算学发达之顺序，今虽不能明了，然根据现存之材料，便宜上可以《算经十书》以前之时代为

第一期，则《十书》成立之时期，则为第二期。此种区分，原属不得已而为之，盖全为人为的假定，无精密之历史的意味也。”关于第三期，他解释说：“及宋元之际，算学发达上，及发生一大变化，构成前代未闻之新算学。若干人物与宋元新算学组织有关系者，……如宋之秦九韶、杨辉，元之李冶、郭守敬、朱世杰等即是。彼等之算书，其著作年代，乃自纪元一二四七年至一三〇三年，即仅有五十七年之成绩。……在此极短期间，中国算学，别开新面最为发达，乃一极显著之现象也。”至于分为五期的第四期“乃古来算学受西洋之影响而复与西洋对立之时代”，三上义夫又把此期分为三个小时期，即西洋算学之传入期，对于古算书与所译西方算书之研讨期（西算不再传入），19 世纪中叶西方微积分等之传入期。他看到这第三期“斯时学者辈出，著作颇多，比之前代，其局面之新开，自不待言也。”他所说的第五期是因为此期的中国算学“已采用西洋算学之研究法，步入世界一般之算学的生活中矣。”

按照这种分期方法，虽然有两段历史时期被排除了，即《算经十书》于唐初成立之后到 1247 年之前和 1303 年之后到明末。三上义夫说：“通观唐代长期间，即无著述传于后世。”后来也无多大变化；“明代全为算学衰退之时代，恐不能为之特立一时期也。”①

2. 李俨的方案。李俨在所著《中国数学大纲》上册中，根据中国数学史“盛衰之大势”，把直到清末的中国数学史分为以下五期：

上古期，自黄帝至周秦，约当公元前 2700 年到公元前 200 年。

中古期，自汉至隋，约当公元前 200 年到公元 600 年。

近古期，自唐至宋元，约当公元 600 年到 1368 年。

近世期，自明至清初，约当公元 1368 年至 1750 年。

---

① 三上义夫．中国算学之特色，林科棠译，上海：商务印书馆，1929．3～6

最近世期，自清中叶至清末，约当公元1750年至1900年。[①]

他在1933年出版的《中国算学小史》也采取同样分法[②]。在《中国算学史》中，前四期与上两书完全一致，第五期把下限由公元1900年改为1912年[③]。

李俨没有进一步说明他把中国数学史分为五期的理由。不过根据他所说的"中国数学盛衰之大势"[④]和"中国算学，就其盛衰倚伏之大势"[⑤]等语可以体会到：他是按照中国数学发展起伏状态分期的。

3. 李约瑟的方案。李约瑟在他的《中国科学技术史》数学部分中虽然没有明确提出分期问题，但是在其第三部分"中国数学文献的几个主要里程碑"中却有分期的味道。他分三个时期讨论中国数学文献，即：

（1）从上古到三国（3世纪）。对《周髀算经》和《九章算术》进行了较详细的讨论，也涉及到徐岳和刘徽等人的工作。

（2）三国到宋初（10世纪）。李约瑟说：在三国"以后的几个世纪内，出现了六部有声望的（数学）著作，但近代学者不易定出它们的年代"。这六部数学著作指的是：《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》、《缀术》和《缉古算经》。同时也提到了《开元占经》和一行（张遂，683～727），他认为一行"是唐代最著名的数学家"。

（3）宋、元、明时期。李约瑟着重讨论了宋、元的数学著作和数学家，特别是对沈括（1031～1095）、秦九韶、李冶（1192～1279）、杨辉、朱世杰等及其著作介绍得较细。他认为"在明代初

① 李俨. 中国数学大纲，上册. 上海：商务印书馆，1933. 1
② 李俨. 中国算学小史，上海：商务印书馆，1933. 1～2
③ 李俨. 中国算学史，上海：商务印书馆，1937. 1
④ 李俨. 中国数学大纲，上册，上海：商务印书馆. 1933. 1
⑤ 李俨. 中国算学小史，上海：商务印书馆，1933. 1～2

期的 150 年间，数学上几乎没有什么令人注目的东西"，后来虽然出现了唐顺之（1507～1560）、顾应祥（1483～1565）等数学家，"但是，这些明代数学家没有一个通晓宋、元的代数学。宋、元的代数学完全被废弃不用了"。他还认为"在明代数学家当中，最引人注目的是程大位，他的《算法统宗》出现在 1593 年"。然后，介绍了明末西方数学传入中国的简单情况。

李约瑟在讨论了上述三个时期的数学著作之后，作结论说："到这里，关于古代和中世纪中国数学的主要方面和主要文献的论述已告一段落"①。

4. 钱宝琮的方案。钱宝琮明确提出了中国数学史的分期问题，他在 1963 年指出说："中国的封建社会是如此之长，在编写（中国数学史）的过程中，很自然地要碰到如何分期的问题。数学的发展，和其他事物的发展一样，有时快些，有时慢些，在发展的过程中呈现出一定的阶段性。"据此，钱宝琮把 1911 年以前的中国数学史划分为四个时期，即

第一个阶段：上古到秦统一以前。

第二个阶段：秦统一到唐代中期。

第三个阶段：唐代中期到明代中期。

第四个阶段：明代中期到 1911 年。

他还说："公元 1912 年以后，中国数学逐渐进入了现代数学的新阶段。"②似乎有把 1912 年以后的中国数学划为第五个阶段的设想。

钱宝琮主编的《中国数学史》一书，基本上是采用的这种分期法，全书分为四编，每编一个阶段（时期），有他自己的一段解释。他说："从《九章算术》到唐代十部算经的完成，是我国传统

---

① 李约瑟. 中国科学技术史，中译本，第三卷. 北京：科学出版社，1978. 38～118

② 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964. 序

数学的形成和发展时期；唐代后期实用算术的发展和明代后期西洋数学的研究，就其内容讲来都与前一阶段有所不同。因此我们以从秦统一到唐中叶做为一个阶段写入第二编，从唐中叶到明中叶作为另一个阶段写入第三编。此外，春秋末期以后虽属转入封建社会的历史阶段，但这时期中有关数学史的资料并不多，因此我们便把它写入秦统一前的中国数学这一编（第一编）中。公元1840～1911年这一阶段，由于同样的理由，我们也没有另辟一编而是把它写入第四编之内。"[①]在实际写法上又略有出入，就是第三个阶段和第四个阶段的分界不在明中叶而是明末。

5. **梁宗巨的方案**。梁宗巨在著作《世界数学史简编》一书中有一节专门讨论分期问题，虽然讲的是世界数学史，但是把中国数学史的一部分放入相应的时期中加以叙述，并且在这节的末尾单独提出了中国数学发展的分期。他把世界数学史分为五期，即（一）数学萌芽时期（公元前600年以前），（二）初等数学时期（公元前600年到17世纪中叶），（三）变量数学时期（17世纪中叶到19世纪20年代），（四）近代数学时期（19世纪20年代到第二次世界大战），（五）现代数学时期（20世纪40年代以来）。他的这一分法参考了前苏联的柯尔莫戈洛夫（A. H. Колмогоров，1903～?）[②]和关肇直[③]的主张。梁宗巨在同一书中有一章叫"萌芽时期的数学（下）"讲述"中国先秦时期的数学和某些有关问题"，在时间上与他的分期略有不合。

梁宗巨认为"中国社会的发展具有和西方不同的特点，它较早地进入封建社会，而长期停滞在封建制（后来是半封建半殖民地）之中。因此数学的发展也略有不同"，他因而把整个中国数学

① 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964. 序

② 柯尔莫戈洛夫. 数学. 赵孟养译. 见苏联大百科全书（2版），第26卷

③ 关肇直. 数学史的划期，数学的萌芽时期. 数学通报，1960（2）：8～11

的发展，分为以下六个时期：

（一）先秦萌芽时期（从远古到公元前200年）；

（二）汉唐创始时期（公元前200年～公元1000年）；

（三）宋元全盛时期（公元1000年～14世纪初）；

（四）明清西学输入时期（14世纪初～五四运动）；

（五）近代数学时期（五四运动到新中国成立）；

（六）现代数学时期（解放后）。[①]

6. 李迪的方案。李迪在其所著《中国数学史简编》一书中也提出了一种分期方案，把直到20世纪40年代的中国数学发展分为以下四个时期：

（1）原始社会到西汉末年（公元1世纪初期以前）；

（2）东汉时期到元代中期（公元1世纪初到14世纪初）；

（3）元代后期到清代中期（公元14世纪初到19世纪中期）；

（4）清代后期到抗日战争时期（公元19世纪中期到20世纪40年代）。

他没有进一步对这一分期法给出解释，不过他把此种分期贯穿全书，他写道："关于中国数学史的分期，本书大体上是按我国数学发展的阶段性划分的。每一章基本上是一个时期，但在叙述上有时也有交叉。"[②] 因此，四个时期反映在书上就是四章。

李迪在书末，提出了在所讨论的整个历史时期内中国数学发展有过五次高峰，即西汉末期，三国到南北朝中期，隋到唐中期，北宋中期到元中期和20世纪30年代[③]。这里所说的高峰与分期没有直接关系，第一个时期有一个高峰，第二个时期有三个高峰，第三个时期没有高峰，第四个时期有一个高峰，其中第一、第四、

---

① 梁宗巨．世界数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1980．7～15

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．前言，414～415

③ 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．前言，414～415

第五个高峰为第一期、第二期和第四期的末尾。

在山东教育出版社出版的、集体编写的一本《中国数学简史》中也提出了中国数学史分期问题，主张把中国传统数学的发展分为四个时期，对广义的中国数学史的发展则分为五个时期，即

第一时期，中国数学的起源时期（西汉末以前）。

第二时期，中国数学理论体系形成发展时期（从东汉初期到元代中期）。

第三时期，中国数学的缓慢与西方数学的输入时期（从元代后期到清代中期）。

第四时期，中西数学的合流时期（清代中期到清代末期）。

第五时期，现代数学研究的开端与进展时期（从清末到1965年）[①]。

第二节 中国数学史分期的标准

中国数学史的分期和其他历史分期一样，应当遵循某种标准，因此有必要讨论一下分期标准问题。如果这个问题不明确，那么整个分期方案将是混乱的、不科学的。

1. 已有的分期标准。从上面所举出的案例来看，中国数学史的分期标准是因人而异的。归结起来基本上有三种，即朝代的更替、社会性质的演化和中国数学本身发展的阶段性。其中完全按朝代分期的作法还没有找到，往往是三者结合使用，或者是交替使用。钱宝琮的看法是："最好的分期方法就是：既不脱离一般的社会条件，而又能从数学本身出发，反映这种在发展过程中的阶段性。"[②]表现在具体分法上，第一和第二时期的分界线以"秦统

① 中外数学史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986. 16～17

② 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964. 序

一”中国为标准，而第二和第三时期的分界线是从数学本身考虑的，第三和第四时期的分界线说是明朝中叶，可实际上是明末，即以西方数学传入中国为标准划期，但第四时期的结尾为1911年，这又是以社会政治为划期标准的。

三上义夫以数学成果比较集中为标准的分期法，实质上也是以数学本身划分的，但是如上所述，他把几段历史时期扔掉。由此可见，三上义夫的分期不具有连续性。李约瑟的三个时期以朝代划分，但不能看作是一种严格的分期标准，只是为了说明各时期的主要算书的历史时代。

李俨的分法，虽说是就中国数学“盛衰倚伏之大势”进行，但基本上都往朝代上靠，唯第四和第五两期的分界线在清中叶（约1750年），而第五期之结尾先为1900年是以世纪为标准，后来改为1912年则是以社会政治更替为标准的。1900年或1912年，在中国数学发展上没有呈现出明显的“盛衰之大势”。

梁宗巨的分法似乎是用到朝代更替、数学本身的阶段性和社会的演化，有时还以政治运动如第四期和第五期是以五四运动分界的。

李迪的分法基本上以数学发展本身的阶段性划分，但仔细研究一下就会发现：第三期的结尾与其他三期有所不同，就是这次结尾时不是中国数学的高峰，而是低谷。

这些分期方案所采用的标准中，差不多都考虑到数学本身这一因素。

2. 选择中国数学史分期标准的原则。拿什么做为中国数学史分期的标准呢？首先应当明确选择标准的原则，我们认为主要的原则有三条，可以分别称之为“通用性原则”、“本质性原则”和“具体性原则”。

所谓“通用性原则”，就是中国数学史分期的标准应当和世界数学史分期的标准基本上是相同的，也就是说世界数学史的分期

标准适用于国别数学史的分期，国别数学史的分期标准不能与世界数学史的分期标准不一致。只有使用这一原则选择中国数学史的分期标准，才能完全清楚中国数学史与世界数学史每段历史时期的水平，否则是不好比较的，也不易发现中国数学史的真实面貌，没有办法说出其高低。

再说“本质性原则”。科学史的分期和逻辑学中关于“概念”的分类（划分）很类似，分类要求以概念的本质属性为标准，科学史的分期也应当如此，中国数学的分期同样不应例外。就是说中国数学史的分期必须选取中国数学发展中（整个数学史也如此）某种最主要的事实为分期标准。在中国数学发展过程中，至少有四种事实与中国数学史相联系，即世纪的更替、朝代的改换、社会发展阶段和数学本身的矛盾运动。

在上述四个方面中，前三个在中国数学中都是非本质的，特别是头一个更是如此，我们可以举出很多例子说明这个问题。世纪完全是人为的东西，可以从任何一年起算，也可以把每百年为一世纪改为其他多少年为一世纪（当然可以称做其他什么别的名称），就是已经公认和通用的世纪的更替也不能反映数学发展的阶段性，不存在由上一世纪进入下一世纪数学发展也由上一时期进入下一时期的事实，即使偶有个别现象出现，也是纯属巧合。朝代的改换和社会发展阶段与数学发展的关系较为密切，但是它们同样不能做为中国数学史分期的标准，因为很显然，绝不能由于朝代的改换和社会发展的不同阶段使中国数学史立即进入新时期，例如元朝最为明显，前期数学水平很高，中后期就不行了；辛亥革命在中国历史上是重要的社会变革之一，可是 1911 年 10 月以前和以后数学在中国并无截然地变化。我们也必须看到，中国社会发展的不同阶段与数学发展的阶段呈现着某种平行性，可是并不完全同步。只有数学本身矛盾运动才可以做为中国数学史分期的标准，因为这个标准是数学史的最本质的东西，它反映着数

学本身发展的阶段性，更能揭示中国数学的发展规律。

最后讲述“具体性原则”。所谓具体性原则就是要考虑每个国家的具体情况，不能生搬硬套，也就是说数学史分期有通用的标准，而当把这个标准使用于某一国家时还要结合该国数学发展的具体情况，特别是不能在时间上“一刀切”。确定分期的“界限”时间（年代）每个国家大都不同，中国的与世界的也有很大差别。同是一个时期，中国数学史与世界数学史有先后之不同，时期长短也不一样。

根据以上所述，我们对中国数学史分期标准的选取必须遵循三原则，否则不能反映中国数学发展的真实面貌，要最大限度地避免人为的痕迹。

第三节　我们的分期方案

在做了上面的一些准备工作之后，我们现在提出中国数学史分期方案，这个方案是在李迪分期的基础上修改而成的，拟把中国数学史分为以下四期：

1. 中国数学发展的第一个时期（中国传统数学的形成期）。这一历史时期最长，大约总有几万年，再早因为没有资料不好下结论，最后终结于西汉末期。在这一漫长的时期中，数学在中国从萌芽，经过长期积累，到西汉末期完成数学专著，标志着中国传统数学体系的形成。就社会发展阶段来说，从旧石器时代末期起，经历整个新石器时代、奴隶制时代，到西汉末期已经是封建社会了。仔细考察一下，这一时期又可以分为三个历史阶段。

第一阶段，公元前2000年以前的时期，在社会史上相当于新石器时代末以前。这一阶段的研究资料全是考古挖掘出来的文物，非常零散，搜集十分困难。根据文物研究原始社会中国人所认识到的数目和几何问题，研究其计数方法和工具。从他们遗留下来

的刻划符号中，找到了具有数字意义的符号，有些是汉文数目字的雏型。这个阶段的研究也可以参考一些较晚的历史传说，但可靠性是值得怀疑的，不是依据资料。这是一个基本上没有文字的时代，因此我们称之为中国数学的“考古期”或“史前期”。

第二阶段，约公元前2000年到公元前220年，在社会史上相当于奴隶社会到封建社会的开始时期。这一阶段的研究资料主要是文字，其中早期的文字来自考古，如甲骨文、金文等都是通过考古工作发掘出来的，但数学史研究主要是文物上的文字而不是文物本身。这一阶段已经有了大量的书籍，特别是春秋战国时代完成的书籍更多，即所谓先秦时期的“诸子百家”著作。在这两类文字中包括很多与数学有关的记载。不过也有些文物本身具有某种数学性质，与文字记载相结合，能说明更多的数学内容。由于社会的各种需要，在这约1800年的历史中，数学发展较快，积累起较丰富的数学知识。但是这些知识是零星的，并且多与具体事物联系，没有形成系统。虽然没形成系统，可是给系统的形成打下了稳固的基础。我们可称之为“积累期”。

第三阶段，经历的时间很短，从秦汉之际到西汉末期，约240年左右。这一阶段的主要特征是专门数学著作的出现。明确知道的至少有4部数学著作，即《算数书》、《许商算术》、《杜忠算术》和《九章算术》，前后相距大约不过150年。数学专著的出现标志着数学知识的集中。从《九章算术》全书和《算数书》的少量内容来看，中国数学已形成了独立的知识系统，对后来产生了巨大的影响。不仅如此，在这些数学著作中还包括着许多数学成果，算术的、代数的和几何的都有。再加上同时代完的《周髀》中的数学成就以及历法研究中所用到的高深数学知识，使当时的数学达到很高水平，形成了中国数学发展史上的第一个高峰。

2. 中国数学发展的第二个时期（中国传统数学的发展期）。从东汉初期到元朝前期，即约从公元1世纪初期到公元1303年的

1300 年。在这一时期中，中国数学基本上是独立发展的，受外国数学的影响很小（不是没有），而且发展呈起伏状态，硕果累累。可以说是中国传统数学的黄金时代。这个时期，《九章算术》占有极其重要的位置，可以与西方的欧几里得《几何原本》相比[1]，它不仅是人们学习数学的标准教科书，而且研究数学也以该书为起点甚至做为撰写数学书的模式。根据这一时期的具体情况，我们分为三个阶段。

第一阶段，约从公元 1 世纪初期到公元 8 世纪初，亦即东汉初到唐朝中期，差不多七个半世纪。这个阶段出现了一些在世界上堪称一流的大数学家，刘徽、祖冲之、刘焯、王孝通等都是代表人物。这个阶段数学研究的重点在理论方面，许多成果居世界领先地位。因此，我们可称之为“理论期”。这个时期把十部算经搜集在一起，加以整理和注释，做为国家学校算学科的数学教科书，同时规定了一套教育制度，因而也是国家数学教育奠基期。

第二阶段，从公元 8 世纪初到 11 世纪初，约 300 年，相当于唐朝中期到北宋初期。这一阶段的中国数学与前一阶段大不相同，其主要之点在于：其一，理论研究显著减少，历法、经济等方面的应用有很大发展；其二，简算法发展很快，算法歌诀和算表开始流行；其三，除插值法等外突出的成果不多，领先于世界的数学成果很少。无怪乎三上义夫把包括这一阶段在内的更长的一段时期（到 1247 年前）没有看做中国数学的发展阶段。实际上，三上义夫虽然对北宋的沈括倍加赞扬，但是没有算在一个时期之内，另外早于沈括的刘益和贾宪的工作当时还不为人们所熟知，当然不可能考虑在他的分期之中，这样，他的第三时期的前一部分足足少了 200 年！根据这一阶段的实际情况，我们称之为中国数学

---

① 李迪.《九章算术》与《几何原本》. 见：吴文俊主编.《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982. 105～119

的“滞缓期”。

第三阶段，从公元11世纪初到14世纪初，约270多年，相当于北宋中期到元朝前期(1303年)。这一阶段的中国数学以很快的速度向前发展，取得不少突出成就，达到很高的水平，形成中国数学的高峰期，或说是黄金时代，特别是三上义夫所说的第三时期（1247～1303）的半个世纪零几年内成果尤为显著，可以说是高峰期的高峰。但是，我们必须看到：这个高峰的出现与前一段时期的数学发展有密切关系，或者说这50年的高峰正是其前200多年数学发展的继续。

这三个阶段，两头高中间低，形成一个“马鞍形”，而不是近似于直线的发展。

3. 中国数学发展的第三个时期(由中国传统数学向西方数学的转变期，或称“过渡期”)。这一时期，从公元1304年起到1936年，约630年，相当于从元朝中期到民国中期。在这630年中，中国数学的发展虽然很曲折，但是总的趋势是中国传统数学向西方数学转变的过程。根据这个过程的实际情况，我们有理由把这一时期分为四个阶段。

第一阶段，从公元1304年到1606年，几乎是300年，相当于元朝中期到明朝后期。这一阶段的特点是，前一时期的高水平研究突然停止，在明朝有名的数学家甚至不能透彻理解高峰期的某些数学成就。代之而起的是数学的歌诀化，这个阶段的几乎所有数学著作都包括大量的数学歌诀，有的著作大部分都是歌诀。同时，珠算逐渐代替了传统的筹算，成为主要的计算工具。这种情况与商业的发展、资本主义的萌芽有密切关系，数学带有商业性质。因此，对这一阶段数学的认识和评价就要持慎重态度，与其说是落后倒不如说是大发展前的准备更合适些。我们把此阶段叫做“准备期”，从数学本身的特点来看也可以称为“歌诀期”或“珠算期”。

第二阶段，从1607年到约1760年左右，约150年，相当于明朝末期到清朝中期。前面所说的“大发展前的准备”是什么意思呢？关键在于“发展”，由于资本主义生产的发展将需要更多更高深的数学，有可能使中国数学形成新的高峰。但是实际上，并不是这样顺利，中国数学的进一步发展受到了一定的挫折。主要是中国的资本主义发展缓慢，明末内忧外患，都使数学的发展受阻。这一阶段的主要特点是西方初等数学的传入中国，中国学者对西方数学进行了学习和研究，并吸收到中国传统数学中来，成为中国数学的组成部分，在某些方面取得较好的成果。呈现了一种中西数学融合的局面，形式基本上是中国传统的，而不是西方的。我们把这一阶段称之为“融合期”。但是，遗憾的是，西方已经形成的变量数学没有被中国学者所了解，只有星点的内容为中国学者所知，因此“融合”的结果没有达到应有的高度。

第三阶段，约从1760年到约1850年，即约90年，相当于清朝中后期之间。如果说第二阶段由于吸收西方数学，使中国数学有了新的发展的话，那么这种发展是有限度的，而且经不起中国传统势力的阻击。西方数学的传入工作逐渐停止，挖掘和整理中国历史上的著名数学著作的工作很快兴起，出现一种复古思潮。我们可以称这一阶段为中国数学的“复古期”。在这一阶段中，虽然出现了一批可以认为是有才华的数学家，可是由于处在一种复古思潮的环境下，与世界最先进的数学隔离，所取得的高水平成果是不多的。

第四阶段，约从公元1850年到1936年，85年左右，相当于清朝后期到民国中期。这个阶段的中国数学相当复杂，先是在原来的基础上有所提高，接近高等数学的萌芽，可是很快西方古典高等数学就传入了中国，开始直接学习和研究西方古典高等数学。从1859年起，到1920年左右，主要是中国学者吸收西方古典高等数学的年代，创造性的数学成果可以说微乎其微。在这个年代

的后期，中国陆续有人出国学习数学，研究能力和水平有了很大提高。到本世纪一十年代末，中国学者开始用西方的方式发表论文，以后逐年增加，到30年代中期在水平上已经达到了一个高峰。1935年成立了全国性的数学学术团体——中国数学会，第二年出版了学术刊物——《中国数学学报》，在此之前已经开始培养研究生。到此，中国传统数学已完全转变为西方数学，除珠算外连一点中国传统数学形式的影子也难找到了。我们把这一阶段称之为“西化完成期”。

4. 中国数学发展的第四个时期。这个时期从1937年起到现在，已有了整整半个世纪的历史，何时进入第五个时期，目前还看不出来。本期的中国数学完全是西方式的，不论研究内容还是方式方法都是如此。可以说，中国数学是世界数学的有机组成部分，再也没有办法把这两者区分开来，只能说哪些成果是中国人取得的，哪些成果是外国人取得的。另外，本期时间尚短，看不出明显的特征，因此无法取一个特有的名称予以概括。但是我们必须看到：本期政治对数学工作的影响是巨大而深刻的，甚至可以说中国数学的命运和中国的政治紧密结合在一起，几乎可以按政治形势划分阶段。不过我们还不愿意根据政治形势来划分，因为政治和数学毕竟是两回事，还是按照我们的统一标准——数学本身的矛盾运动划分为好。

第一阶段，从1937年到1957年的20年间，即相当于由抗日战争到“反右”斗争。时间虽短，但形势复杂，数学的发展刚刚进入小高峰期，很快全国就处于战争状态下，数学研究受挫。1949年中华人民共和国的成立，数学得到恢复和发展，在50年代取得了一批较重要的成果，有的（如拓扑学、数论、函数论、几何学）是突出的。虽然在1957年因“反右”斗争的扩大化，使一些数学工作者蒙受不白之冤，可是数学研究并没受到大的影响。

第二阶段，从1958年到1977年的20年间，中间经历了“十

年动乱”（1966～1976），数学研究几乎完全中断，只有极少数人不顾严酷政治形势而从事研究。为什么把这样的一段历史划为一个数学发展阶段呢？主要是从数学自身的情况考虑的，因为1958年制成了大型通用数字电子计算机，运筹学等新分支也有了较快发展。但是，我们还必须看到：这是中国数学发展史上的一个不正常的阶段。

第三阶段，1978年以来，下限到什么时候目前还定不下来，必须等待若干年之后才能有个眉目。为什么从1978年划分阶段呢？因为从1978年起，中国数学研究和人才培养开始恢复正常，学术团体也从本年起有了活动，十余年来第一次在全国范围内招收了数学专业的研究生，等等。进入80年代以来，数学的学术刊物大量增加，除了综合性的刊物外，还出版了一些分支学科的学术刊物，如数学物理、模糊数学、系统科学等等。在数学成果方面，如模糊数学、机械化证明、计算数学、组合数学等都取得了值得称道的成果。

我们希望中国数学在不久的将来进入高峰期，形成本时期的第四个阶段，然后转入中国数学发展的第五个时期。

根据以上的分期方案，每一个时期大体由两条线段（一长一短）构成的一条折线，连接起来如下图所示：

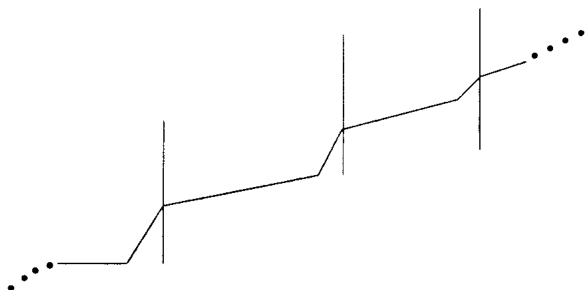


图 1·3·1　中国数学史分期示意

第四章 中国数学史研究的历史与现状

本章将较详细地叙述中国数学史研究的历史和现状，也就是叙述“中国数学史学史”。中国数学史研究我们分为四个历史时期，划分的标准主要是研究工作本身发展的阶段性，而不是按照社会史的分期或政权更替或世纪。这样划分法基本上避免了人为的痕迹。根据这样设想，本章自然地分为四节。

第一节 中国数学史研究的萌芽时期

中国数学史研究的这一时期，约从公元前二三世纪之间到公元1912年，长达2100多年。在这样长的历史时期中没有出现可以称得上中国数学史的有关专门论著，只有些零星记载或资料性的著作，因此仅能算是萌芽罢了。

1. 萌芽的开端。中国数学史研究是从什么时候开始的呢？找不到明确的答案。大约成书于秦汉之际的《世本》（早已失传）中有“隶首作算数”的记载，稍早的《吕氏春秋·勿射篇》中也说：“黔如为虑首，史言作算之始也”。虑首与隶首应指一回事，是传说中的人物，后来影响甚大。这是关于中国数学史的一条最早的资料。说“隶首作算数”不符合历史实际，如果认为隶首是原始社会时代对数学有贡献的人物的代称是可以的。

以后在一些著作中也经常提到前人的数学工作，具有数学史性质，如三国刘徽《九章算术》序、唐王孝通《上缉古算经表》等都是。

北宋初编的《册府元龟》卷869有“明算”条，讲数学在中

国的发展，主要是讲的各家小传，李俨认为“这是中算史的开始”①。北宋末期又在国家算学馆为历史上的天文数学家造像和封爵，也是有关数学史的活动。

元祖颐在朱世杰《四元玉鉴》后序中讲述了由天元术到四元术的历史发展。明程大位（1533～1606）在所著《算经统宗》卷末，有“算经源流”条，列举从宋元丰七年（1084）到明万历十六年（1588）的505年间的数学著作51种，遗漏多种。

清乾隆间编《四库全书》时对每一本书都写了提要，其中也包括一些数学书。提要对各书的流传和作者都做了一定的考证和说明，接近数学史论文。

类似上面列举的资料还可以找到一些，但都是零零星星的，直到1798年还没有一本与数学史有关的著作。

2.《畴人传》的编写。中国历史上把天文学家和数学家合称为“畴人”，阮元（1764～1849）从1795年起与李锐（1773～1817）、周治平共同为“畴人”写传，到1799年完成《畴人传》一书46卷，收入243人的传记，附西方数学家传记37篇。参与这一工作（主要是校正或提供资料）的还有钱大昕（1728～1804）、丁杰（1738～1807）、凌廷堪（1755～1809）、谈泰、焦循（1763～1820）等当时的数学家。书中资料的来源主要是《二十四史》和天文学、数学著作的序、跋，以及各种文集的有关部分。每篇传记之后都有评论。全书除引用《二十四史》之外，引用其他书计有108种。阮元在选材上很严谨，凡是涉及迷信的内容一概不录。

过了41年，即到1840年罗士琳（1774～1853）在阮元等人的基础上完成《续畴人传》6卷，卷次为47到52卷。阮元为此书写了序，他说：“元少壮本昧于天算，惟闻李氏尚之（锐）、焦氏

① 李俨．中算史的工作．见：中算史论丛，第五集．北京：科学出版社，1955．93～115

里堂（循）言天算，尚之往来杭署，搜列各书，与元商撰成《畴人传》。今老病告归田里，更为昏耄。又喜得罗氏茗香（士琳）论古天算有如此，罗氏续补畴人，各为列传，用补前传所未收者，得补遗十二人，附见五人，续补二十人，附见七人，大凡四十四人，厘为六卷，次于前传四十六卷之后，统前传共成五十二卷，容有挂漏，俟再续焉。”这段话把两次写《畴人传》的大致经过作了一些交待。其中，所谓“补遗”是补阮元等遗漏的，从南宋杨辉到清代陈懋龄，“续补”是阮元等写《畴人传》时尚在的到罗士琳时代的天文学家和数学家传记。写法与阮元等旧例相同。

几十年后，华蘅芳（1833～1902）在《学算笔谈》有《论〈畴人传〉必须再续》一文，并附有其弟华世芳《近代畴人著述记》一篇（1884）。又两年，诸可宝作《畴人传三编》7 卷（1886），1898 年黄钟骏撰《畴人传四编》11 卷和附卷。

前后 100 年间，所完成的这些著作，共引用书籍 400 余种，文字达 60 多万。但是，这洋洋 60 万言的著作怎么样呢？中外学者都早已有评价，李俨认为该书“于各家的生死年月和著作年代，都未深考；往往序文凡例连篇记入，而制作此序文的年月，反漏列不记。即各书精华，学派流传和社会的背影（景），亦全没有顾到。学者虽熟读此 60 余万言的大著，而于中算源流还是无所多得。”[①]基本是全盘否定，我们可以体会到：李俨不认为这套《畴人传》是数学史著作。李约瑟则认为《畴人传》“虽然其中包括从希腊起的少数西方数学家的传记，可是也非常详细地记载了中国人物的传记。由于在过去非专业化时代数学往往只是某些个人的各种科学成就之一，该书可以算做是中国书籍中一本最近乎中国科学史的

① 李俨．中算史的工作．见：中算史论丛，第五集．北京：科学出版社，1955．93～115

著作。"[①] 这种评价也是比较谨慎的。我们认为,《畴人传》还算不上一部中国数学史或科学史著作,只是一些传记资料的初步汇集,仍属于中国数学史的萌芽性质。

3. 数学著作目录的编纂。作为数学史研究的基础的数学著作目录编纂工作，在阮元等之后开始进行。从 1898 年到约 1900 年后不久，先后有五人编过中国数学著作目录，即陈澧（1810～1882）的《算学书录》、冯澂的《算学考初编》（1898）、刘铎的《若水斋古今数学书录》（1898）、丁福保（1874～1952）的《算学书目提要》（1899）、梁兆铿（1864～1926）的《天文算学考》（1900 年之后不久）。其中陈澧的《算学书录》稿本一册[②]，内容比较单薄，不加介绍，下面将另四著作作一简短说明。

冯澂的《算学考初编》二十卷，有稿本未刊[③]。为什么叫"初编"呢？他自己说："右《算学考初编》二十卷，网罗畴人书目甫完存佚，尚未审定，序、跋亦未详录。适坊友搜余旧稿，见而善之，请增入丛书二集。余思缺而不完，世间事类如是耳，奚恋恋为？乃强分二十卷，命为初编，挂一漏万，夫何待言。但序、跋未及录者，均著明未录，异日续成，即以此二十卷为嚆矢，亦无不可。"[④]实际上，本书虽名为《算学考初编》，而实由算学、天文和历法三部分构成，其中卷 1～13 为算学，可知算学书目的比例最大。

刘铎的《若水斋算书录》8 卷，有光绪二十四年（1898）算学书局石印本和《古今算学丛书》本。此书所收算学书目仅是一部分，而天文、兵法、物理，甚至奇门遁甲等书目都一律收入。因

---

① 李约瑟. 中国科学技术史. 中译本，第一卷，第一分册. 北京：科学出版社，1975. 107

② 藏北京图书馆。

③ 藏北京图书馆。

④ 冯澂. 算学考初编. 后记

此，周云青认为“似亦过于泛滥”[1]，有批评之意。

梁兆铿的《天文算法考》稿本十六册[2]，未刊。

丁福保的《算学书目提要》三卷，有光绪二十五年（1899）无锡竢实学堂刊本，书前有华蘅芳序和丁氏自己写的例言，例言说：“是书所辑，厘为三类：曰中算类，曰西算类，曰中西算总类，以便学者之检寻。”全书共收书目有95条，每条有简短提要，所收范围是现在者，实际是他亲见者为限，故为数不多。

根据以上所述的事实来看，直到19世纪末，还没有称得上中国数学史的论著，没有脱离萌芽状态。后来虽然有几篇文章，但仍未有明显进步。

第二节 中国数学史研究的奠基时期

从20世纪初，中国数学史研究进入了一个新阶段，其主要标志是采用了科学的研究方法，内容得到了彻底更新。到1955年底止的40多年中，中外数学史工作者在中国数学史方面作了大量工作，为中国数学史的进一步发展打下了良好的基础。

1. 科学研究方法的开端。在西方对中国数学史的讨论大约开始于19世纪50年代，例如德国的贝尔纳茨基（K. L. Biernatzki）就讨论了《周髀算经》中的数学内容[3]。但是，真正系统地研究要到20世纪初。这件工作是中外学者几乎同时开始的，外国比中国早三四年。主要的外国学者有两位，一是美国的史密

---

[1] 周云青．四部总录算法编．序．北京：商务印书馆，1957

[2] 此书原为李俨收藏，现藏中国科学院自然科学史研究所。

[3] K. L. Biernatzki. Die Arithmetik der Chinesen. Crelle's Journal, V. LII (1856)

斯，一是日本的三上义夫，他们都是世界上著名的数学史家。史密斯早在1912年就发表了一篇名为《中国数学》的短文[①]，第二年他又在与三上义夫合作的书中讲到了中国数学史[②]，特别重要的是同年三上义夫出版了在西方影响很大的著作《中日数学之发展》[③]。《中日数学之发展》一书分为两部分，第一部分为中国数学，最早系统论述中国数学史之著作，但还不是专著。

中国人以科学方法研究中国数学史的以李俨(1892～1963)为最早，1915年5月20日他曾致函史密斯提到修治中国数学史的计划，此后并拟与史密斯合作编写英文本中国数学史事，以第一次世界大战方殷而未果[④]。1916年，他的处女作《中国数学史余录》问世[⑤]，三年之后他的重要论文《中国数学源流考略》发表[⑥]，张崧年在“识语”中说：“史事本难，而况以今日他国人说中国史？晓得这个，吾们自考索，自纂纪，便越觉得不容缓。李俨所作对于外人的失实，就很有戡正。他现在这篇未能求译（他另有英文汉文两种详史之作)，也可算得这方面的破天荒了。”[⑦] 这个评价是恰当的。此后，李俨历年都有中国数学史论文发表。

在李俨发表论文不久，钱宝琮（1892～1974）也开始了中国

---

① Smith, D. E. Chinese Mathematics, The Popular Science Monthly, Vol. LXXX (1912), PP. 597～598

② Smith, D. E., and Mikami, Y., A History of Japanese Mathematics, 1913, Chicago

③ Mikami, Y., The Development of Mathematics in China and Japan, 1913, Leipzig

④ 严敦杰．李俨与数学史．见：科学史集刊（11）．北京：地质出版社，1984．1～5

⑤ 见：科学．1916，2（2）：238～241

⑥ 见：北京大学月刊．1919，1（4）：59～74，1920，1（6）：65～94

⑦ 张崧年．“中国数学源流考略”识语．北京大学月刊．1919，1（4）：21～22

数学史研究工作，第一篇论文于1921年正式发表[①]，以后经常有论文面世。他和李俨先生同是我国中国数学史研究的创始人和奠基人。李约瑟认为“在中国的数学史家中，李俨和钱宝琮是特别突出的。钱宝琮的著作虽然比李俨少，但质量旗鼓相当。”[②]

后来陆续加入到中国数学史研究这个行列中来的有裘冲曼、张荫麟、刘朝阳、孙文青、严敦杰、章用（1911～1939）、许莼舫等。

这些人都不同意继续用编《畴人传》的方式写中国数学史，而是主张重新搞。李俨说：“亦将如诸、黄之例，勉强赓编呢？或是翻昔日的成案，而重编一本算史呢？近十余年来有志于后说的，有李俨、钱宝琮、裘冲曼、严敦杰诸人。”[③] 所谓“重编”是指按当时西方的方法编写中国数学史。

2. 中国数学史专著的出版。在研究论文的基础上，很快就出现了中国数学史方面的专门著作，其中最早的一本要数三上义夫的《中国算学之特色》，以论文的形式于1926年用日文在《东洋学报》上发表，1929年由林科棠译为汉文在中国出了单行本。紧接着李俨、钱宝琮都有专著问世。

1949年以前，李俨的中国数学史著作有：《中国算学小史》（1930）、《中国数学大纲》上册（1931）、《中国数学史导言》（1933）和《中国算学史》（1937）四种，都是通史性著作。其中《中国数学大纲》上册，内容最为丰富，可惜只写到元代。书前有他自己写的“叙例”一小篇，说明写书的目的：“吾国向无数学专史，各家所编畴人传记，每失之繁重，而收集史料，亦多脱略。吾

---

① 钱宝琮．九章问题分类考．学艺．1921，3（1）：1～10

② 李约瑟．中国科学技术史，中译本，第三卷．北京：科学出版社，1978.5

③ 李俨．中算史的工作．中算史论丛，第五集．北京：科学出版社，1955.93～115

国算书现存者数虽不少，而聚集之为难，算式之歧异，学者欲研国算，往往无从入手。间尝有志撰述中国算史，十余年来，收聚史料，大略粗备。爰先成此编，俾世之读中算者，可略识其源流派别。”这个“叙例”写于1928年2月2日，撰著的时间肯定比这还要早一些。此外，他还从1931年到1947年把历年来的论文编成《中算史论丛》（一）至（四）五册[1]。

中华学艺社于1930年将钱宝琮在《学艺》上发表的论文六篇搜集成册，名《古算考源》，于1933年出版。他的学术专著《中国算学史》上册则出版于1932年，以后未再出下册。还有《中国算学史》讲义，没有出版。

在中国数学史著作的出版方面，我们不能忘记许莼舫，他在30年代先后出版了《古算法之新研究》和《古算法之新研究续编》，1948年又出版了《古算趣味》一书。这些书写得通俗易懂，在普及中国数学史知识方面起了很大的作用。

3. 中国数学史研究的新变化。1949年以前中国数学史研究在中国完全是处于一种自发的状态，研究者主要是出于爱国主义思想的动机。他们披荆斩棘，做出了很大的成绩。从1949年10月1日后，中国学者的研究工作有了很大变化。主要的变化有：

研究人员和研究工作受到国家重视。中华人民共和国建立后，党和政府很关心科学史的发展，在竺可桢（1890～1974）的倡议下，中国科学院成立了“中国自然科学史研究委员会”，由17人组成，钱宝琮、李俨均为委员。1955年起李俨、钱宝琮和严敦杰先后被调进中国科学院，成立了“中国数学史研究组”，把研究中国数学史的主要学者集中到了科学院，但还不是一个研究机构。

新版《中算史论丛》的出版。从1954年11月到1955年7月，由科学出版社陆续出版了李俨新编的论文集《中算史论丛》第一

[1] （四）分为上、下两册出版。

集到第五集。这是一件很有意义的事，严敦杰对此事有过很好地评论，他说："李俨先生研究中国数学史已 40 年，40 年来他写了近百篇有关中国数学史论文，最近把其中主要的选辑为中算史论丛共五集，由科学出版社出版；这是李先生 40 年来的辛勤劳动果实，我们应该十分重视它和很好的进行学习。"① 全书共收入 1952 年前的重要论文 43 篇，附 2 篇，计 120 万字，包括了李俨的一些主要研究成果。这部论文集出版后在国内外影响很大。在此期间还将他的《中国算学史》出了修订本（1955）。《中国古代数学史料》于 1954 年做为《中国科学史料丛书》"古代之部" 之首出版。

50 年代初，陆续出版了许莼舫的《中国算术故事》（1952）、《中算家的几何学研究》、《中算家的代数学研究》等著作，销路很广，因而叠经再版。他的《古算趣味》一书也多次重印或再版。

关肇直（1919～1982）对上面两人的工作都给出了评价，现在把对许莼舫的评价的部分摘录于下："许莼舫的通俗性著作，则用更容易懂的方式，介绍了我国古代数学的成就，使得这些遗产能为广大的读者所接受。"②

指导思想的变化。1949 年以来，中国的数学史家注意用辩证唯物主义和历史唯物主义观点、方法研究中国数学史，把以前的工作提高了一步。严敦杰提出研究中国数学史的三点建议。其中第一点是："必须重新进行中国数学史的修订工作。在这项修订工作中，我们的目标不仅是要以正确的观点编著一本有系统的中国数学史，而且也要使国内各学校在讲授中国古代数学史时，能有一本比较完善的参考书。"③ 关肇直更系统地论述了有关中国数学史研究中的一些根本问题和研究内容，如数学 "归根结底是由实

---

① 严敦杰．介绍中算史论丛．数学进展．1957，3（4）：335～339

② 关肇直．怎样研究我国数学遗产．人民日报．1955．9．15

③ 严敦杰．对开展中国数学史研究工作的建议．科学通报，1954（10）：96

践的需要产生的"，等等①。

第三节　中国数学史研究的动荡时期

1949年以来，可以说中国数学史研究出现了很好的势头，从1957年起虽然还在向好的方向发展，但是开始出现波折，1966年到1976年的十年间不仅是停顿而且倒退了。1977年到1980年才又开始恢复。正是在中国处于倒退状态的时候，外国在这方面却做了不少有价值的工作。

1. 研究机构的建立和研究进展。1956年到1957年上半年是中国数学史研究的最好时期之一。1956年9月3日至9日在意大利召开的第八届国际科学史会议，中国科学院派代表团出席了会议，李俨为团员之一，并在会上宣读了题为《中国古代数学家的内插法公式》论文②，这是中国数学史家第一次出席国际会议。1957年1月，中国科学院将"中国数学史研究组"扩充为"中国自然科学史研究室"，李俨为室主任。这是中国历史上第一个科学史研究机构，而且中国数学史是其中最强的一组。在同年，该室开始招收中国数学史研究生，同时对中国数学史发生兴趣并从事研究工作的人也逐渐多起来，其中主要的有杜石然、白尚恕、李迪、沈康身、王守义、梅荣照、梁宗巨、何章陆（何洛）等。

1957年下半年，在全国进行的"反右"斗争的扩大化以及随之而来的"大跃进"和三年经济困难也影响了中国数学史的研究

① 关肇直. 怎样研究我国数学遗产. 人民日报. 1955. 9. 15

② Li Yan, The Interpolation Formulae of Early Chinese Mathematicians, ACTES DU VIIIe CONGRÈS INTERNATIONAL D'HISTOIRE DES SCIENCES, 1956. PP. 70～72

工作，有的人被错划为“右派”[①]，有的被赶出了大学，有的出版计划被撤消[②]，等等。

这次运动对中国数学史研究的影响是微小的，研究工作基本上能照常进行，并且取得了不少成果。1958年由科学出版社出版了不定期刊物《科学史集刊》，钱宝琮任主编，发表包括中国数学史在内的论文。

从1957年到1966年初的9年中在中国出版了有关中国数学史的著作有《中算家的内插法研究》（李俨，1957）、《十三、四世纪中国民间数学》（李俨，1957）、《中国数学史话》（钱宝琮，1957）、《中学数学课程中的中算史材料》（严敦杰，1957）、《中国数学大纲》下册（李俨，1958）、《中国古代数学简史》（李俨、杜石然）上册（1963）、下册（1964）、《中国数学史》（钱宝琮主编，1964）。还有重要古籍《算经十书》由钱宝琮校点，于1963年出版，丁福保、周云青编的《四部总录算法编》于1957年出版，《宋元数学史论文集》出版于1966年，李迪撰写了一些可以列入数学家的小册子，如《唐代天文学家张遂（一行）》（1964）等。此外，尚有一些小册子，我们不多列举了。

这段时间里研究人员也有所变化，增加了何绍庚、李培业、郭书春等，但李俨于1963年1月14日不幸病逝。

2.“十年动乱”时期的中国数学史研究。如果按照60年代前6年的样子朝前走，本来是可以取得更多更好的成果的，可是从1966年6月起全国陷入全面的政治动乱，一乱十年！在这十年中有三方面的情况必须交待。

---

① 最为典型的是王守义，他曾花了很大的精力将《数书九章》“译”为白话文，并交出版社准备出版，因他被错划为“右派”，故撤消了出版合同。

② 1958年春李俨委托李迪将欧几里得《几何原本》汉文本“译”为白话文，同时已找好出版社，后因经济困难，此项出版计划取消。

首先，研究工作完全停止，从1966年6月到1974年7月的八年零一个月中在中国大陆上没出一本中国数学史著作，也没发表过一篇有关论文或文章。几乎所有的中国数学史工作者都没有逃脱这股政治运动的洪流，特别是到70年代初期，中国自然科学史研究室的全部研究人员到安徽农村“五七干校”劳动锻炼，所有办公用房全被其他单位占用。后来虽然回到北京，但长期不能开展研究工作。1975年，研究室被提升为所。研究机构尚且如此，零散的研究人员更不用说了。

其次，研究人员的遭遇和损失。在“十年动乱”中，中国数学史工作者和其他知识分子一样受到了强烈地冲击。梁宗巨先生用十年心血写成的十几大本《世界数学史》手稿，被抄走、丢失。人员的损失同样严重，钱宝琮于1974年1月5日在苏州逝世。王守义、何章陆、许莼舫等也都在此前后相继去世。

最后，“儒法斗争”与中国数学史。1974年夏天起，“四人帮”发动了一场“批林批孔”和“儒法斗争”，一直持续到1976年冬。在这场“斗争”中，科研机构和大专院校以及部队厂矿等都被发动起来写批判文章，中国数学史也就成了一个有用的领域。在这段时间里，据不完全统计，与“儒法斗争”有关的文章有40余篇[①]，祖冲之、沈括等都成了中国历史上的所谓“法家”，中国历史上的光辉成就都归功于“法家路线”，这是对历史的歪曲。但是，我们不能把这段时间内所发表的中国数学史全盘否定，特别是对一些古籍的注释，至今还有某种参考价值，还有些文章与“儒法斗争”无关。

3. 国外的工作。正当我国处于“十年动乱”的时候，国外的中国数学史研究工作在顺利进行。国外的工作在50年代就取得了

① 李迪、李培业. 中国数学史论文目录（1906～1985）. 国内之部. 中国珠算协会珠算史研究会印. 1985

不少成果，如日本的武田楠雄（Kusno Takeda）就发表了一批关于明代数学史的研究论文。苏联的尤什凯维奇（А. П. Юшкевич）也研究中国数学史并有专门论文发表，1957 年别列兹金娜（Э. И. Березкина）把《九章算术》译成俄文出版和 197 条注释也同时发表[①]。英国的李约瑟在其所著《中国科学技术史》第三卷有 168 页的篇幅讲述中国数学史。1960 年苏联的奇斯佳可夫（В. Д. Чистяков）出版了一本中印数学史料[②]。

1964 年李约瑟的助手之一何丙郁（Ho Ping Yorke）到马来亚大学任教，讲授"中国的科学与文明"，其中就包括中国数学史，同时指导研究生，其中与中国数学史有关的有三人，即新加坡大学的蓝丽容、马来亚大学的吴天才和洪天赐（Ang Tian-Se），取得学位的年代依次为 1966，1967，1969，论文题目分别为《杨辉算法研究》、《中国的司天监制度》和《张丘建算经研究》[③]。也就是在这时候，何丙郁、蓝丽容等开始陆续发表中国数学史论文。

别列兹金娜在翻译了《九章算术》之后，继续翻译《算经十书》中的其他算经，同时发表了一批论文。西德的福格（K. Voger）于 1968 年把《九章算术》译为德文。1970 年日本的儿玉明人编辑出版了《十六世纪末明刊的珠算书》一大册，收入 8 种珠算书的明版的影印本和他写的《关于明刊的珠算书》的说明性论文。在 70 年代的后 5 年里，丹麦的华道安（D. B. Wagner）发

① 《Историко～Математические Исследования》，Выпуск X，1957，Москва，CTP. 427～584

② Чистяков，В. Д.《Материалы По Истори Математики в Китае И Инди》，1960，Москва。

③ 何丙郁，洪天赐。マラヤ大学にあけア科学史的位置に关すう报告。科学史研究，1972，11（Ⅱ）：92～94

表了一批以刘徽为重点的中国数学史论文[1]。其他人还有一些工作，不再一一列举了。

从 1973 年到 1981 年，据不完全统计外国学者至少出版了 7 本中国数学史方面的著作，它们是：

〈1〉李倍始（U. Libbrecht）：《十三世纪中国数学》[2]。

〈2〉薮内　清：《中国的数学》（1974）[3]。

〈3〉蓝丽容：《杨辉算法研究》（1977）[4]。

〈4〉谢元作（John Hoe）：《〈四元玉鑑〉中的多项式方程系统》（1977）[5]。

〈5〉斯维兹和高：《是中国毕达哥拉斯吗？》（1977）[6]。

〈6〉别列兹金娜：《中国古代数学》（1980）[7]。

〈7〉马若安（J. —C. Martzloff）：《数学家梅文鼎（1633～1721）研究》（1981）[8]。

在此期间，日本的川原秀城把《九章算术》及刘徽注译成了日文，于 1980 年出版[9]。

---

① 李迪，沈康身.《九章算术》在国外. 见：《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982. 120～136

② Libbrecht, U. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, 1973, Massachusetts: MIT Press。

③ 薮内　清. 中国的数学. 岩波书店. 1974

④ Lam Lay-Yong, A Critical Study of the Yang Hui Suan Fa, 1977, Singapore。

⑤ John Hoe, Les systèmes d'èquations polynomes dans le Siyuan Jujian (1303), 1977, Paris。

⑥ Frank J. Swetz and T. I. Kao, Was Pythagoras Chinese? 1977, the Pennsylvania State University Press。

⑦ Березкина, Э. И. Математика Древнего Китая, 1980, Москва。

⑧ Martzloff, J. —C., Recherches sur L'ceuvre mathématique de Mei Wending (1633～1721), 1981, Paris.

⑨ 收入朝日出版社出版的《科学的名著》2《中国天文学・数学集》

4. 中国数学史研究在中国大陆的恢复。在“十年动乱”中已经完全停止，后又走了邪路的中国数学史研究，随着“四人帮”的垮台而得到了恢复。正好在“四人帮”垮台的日子里在北京召开了一次“中国数学史座谈会”，时间是1976年10月6日[1]到10日。由于当时的思潮的影响，会议存在很大的问题，但也必须看到这次会议还有积极的一面：是中国数学史工作者的第一次聚会，过去没见过面的人见了面，交流了各自对中国数学史的看法；会上还宣读了一些较好的论文，等等。

1977年制订的全国数学规划（草案）中，列入了世界数学史和中国数学史两项，承担中国数学史研究的单位有中国科学院自然科学史研究所、北京师范大学、杭州大学、内蒙古师范大学（原内蒙古师范学院）和西安师范学校（后转移到西北大学）。

中国数学史研究逐渐恢复。1978年全国开始招收研究生，自然科学史研究所和内蒙古师范大学各招收两名中国数学史研究生，自然科学史研究所还接受一名代培生。

1978年12月在成都召开的第三次全国数学会年会和1980年10月在北京召开的“中国科学技术史学会成立大会”上都有数学史组，在宣读的论文中，中国数学史方面的居多数。在前一次会上，梁宗巨和严敦杰当选为中国数学会理事；在后一次会上，严敦杰、李迪、杜石然、沈康身、李文林被选为学会理事，严敦杰为副理事长。

1980年夏，辽宁人民出版社出版了梁宗巨的《世界数学史简编》，这是1966年以来国内出版的第一本这样的著作，其中有一编专论中国数学史。内蒙古人民出版社出版了李迪的《蒙古族科学家明安图》（1978），上海人民出版社出版了李迪的《祖冲之》（1977）和潘鼐、向英的《郭守敬》（1980）等与数学家有关的传

---

[1] 10月6日晚上粉碎了“四人帮”。

记著作。

总的来说，从1976年10月到1980年末的四年多是中国数学史研究的恢复时期，为后来的发展打下了基础。

第四节　中国数学史研究的发展时期

从1981年开始到1988年的8年中，中国数学史在各方面都呈现着欣欣向荣的景象，可以说是进入了一个黄金时代。有几件中国数学史研究史上的重大事件发生在1981年和1982年，因此我们认为1981年应是新时期的开始。

1. **学术会议与学术团体**。“中国数学史座谈会”之后过了将近5年的时间，于1981年7月20日到25日在大连召开了“第一次全国数学史年会”，有50多位代表出席，会上收到30多篇论文，宣读了20多篇。在这些论文中，中国数学史所占的篇数较多，其中较集中的有《九章算术》与刘徽以及清代的两个方面。吴文俊和严敦杰都在会上做了专题报告。这次年会的另一个收获是成立了学术团体——数学史分会，属于中国数学会和中国科学技术史学会的二级学会，由严敦杰、李迪、杜石然、梁宗巨、沈康身、李文林（当时在英国）、梅荣照和袁向东8人组成理事会，严敦杰为理事长。这是中国历史上破天荒第一次有了数学史的学术团体，实际上也是中国数学史的学术团体。

1982年10月在杭州召开的“纪念李善兰逝世一百周年大会”、1983年10月在武汉召开的“中国数学会第四次年会”和1983年10月11月间在西安召开的“中国科学技术史学会第二次年会”上都有中国数学史论文在会上宣读。在第三个会上，沈康身、李迪、杜石然、李文林、梅荣照被选为学会理事，沈康身为常务理事，严敦杰因身体的关系辞去学会职务。1984年5月由《自然

辩证法通讯》杂志社在重庆主办了一次“传统数学与中国社会”学术讨论会，有18人出席，实质上这是一次有关中国数学社会史的专题讨论会。

1985年8月28日到9月2日在呼和浩特召开了“第二次全国数学史年会”，有82人出席，收到了78篇论文，大部分都在会上宣读了。在这些论文中，中国数学史约占三分之二，内容比较分散，有关《九章算术》的和清代的论文多些，特别是清代数学史论文最多。这次年会上对于理事会的组成进行了增补，数学史分会的理事会由（以姓氏笔画为序）白尚恕、严敦杰、张奠宙、李迪、李文林、李继闵、杜石然、何绍庚、沈康身、袁向东、梁宗巨、梅荣照组成，严敦杰仍为理事长，（以姓氏笔画为序）李迪、杜石然、沈康身、梁宗巨为副理事长。

1988年11月在安徽合肥与宣州两地召开“纪念梅文鼎国际学术讨论会暨第三次数学史年会”，所提交和宣读的论文以与梅文鼎有关的居多。外国学者报名的较多，但实际到会的只有日本的3位。学会的理事会没有变动。

1984年10月在西安成立了珠算史研究会，隶属于全国珠算协会。理事长为姜明远，副理事长为梅荣照、李培业等三人。珠算史又是数学史的一部分，研究中国数学史不能不研究珠算史。

2. 众多成果的发表。在这8年中，据不完全统计，共发表中国数学史（包括珠算史）论文和文章680多篇，国外的还未计算在内。出版论文集8本，即自然科学史研究所主编的《科技史文集》第8辑“数学史专辑”（1982）、科学史集刊编辑委员会编的《科学史集刊》11（1984）（刊载的全是中国数学史论文）、自然科学史研究所编的《钱宝琮科学史论文选集》（1983）（在所收33篇论文中，中国数学史有23篇）、吴文俊主编的《中国数学史研究丛书》之一《〈九章算术〉与刘徽》（1982）、之二《秦九韶与〈数书九章〉》（1987）和《中国数学史论文集》（一）（1985）、

（二）（1986）、（三）（1987）。其中后两种是连续出版物。台湾的洪万生出版了《中国π的一页沧桑》（中国数学史论文集，1981，台湾自然科学文化事业公司），又有《从李约瑟出发》（1985）（台北九章出版社），是一本以中国数学史为主的论文集。

在此期间珠算史研究会出版了内部交流的《珠算史通讯》，报道珠算史研究动态和发表一些论文。

国内外学者出版有关著作12种，计有：

〈1〉白尚恕的《〈九章算术〉注释》（1983，科学出版社）。

〈2〉李迪的《中国数学史简编》（1984，辽宁人民出版社）。

〈3〉傅溥的《中华数学发展史》（1982，台北中央文物供应社）。

〈4〉蒋术亮的《中国在数学上的贡献》（1984，山西人民出版社）。

〈5〉白尚恕的《测圆海镜今译》（1985，山东教育出版社）。

〈6〉沈康身的《中算导论》（1985，上海教育出版社）。

〈7〉莫由和许慎的《中国现代数学史话》，（1987，广西教育出版社）。

〈8〉华印椿的《中国珠算史稿》（1987，中国财政经济出版社）。

〈9〉李迪和郭世荣的《清代著名天文数学家梅文鼎》（1988，上海科学技术文献出版社）。

〈10〉中外数学简史编写组的《中国数学简史》（1986，山东教育出版社）。

〈11〉孔国平的《李冶传》（1988，河北教育出版社）。

〈12〉Jean-Claude Martzloff，Histoire des mathématiques Chinoises（1988，Paris）。

3. 国际学术交流。这个时期中国数学史的国际交流非常活跃，有关学者频频出席国际会议。1982年8月，日本数学史与珠算史

访华团来到中国访问，和中国的数学史分会成员在北京举行一次座谈会，进行了学术交流。日方的成员有下平和夫、铃木久男、桥本敬造等，中方的成员有严敦杰、梁宗巨、杜石然、梅荣照、何绍庚、郭书春、罗见今、李兆华、刘钝等。中国方面还有几人因出国，未出席这次座谈会。

1982 年 8 月 16 日至 20 日在比利时鲁汶大学召开了“第一次中国科学史国际讨论会”，有 7 名中国学者出席了会议，其中有 4 名数学史工作者，即白尚恕、沈康身、李迪和李文林，提交论文 9 篇，数学史 4 篇。外国学者蓝丽容、马若安（Jean-Claude Martzloff）、林力娜（K. Chemla）都在会上宣读了中国数学史论文。李倍始是这次会议的筹备人和秘书长。

1983 年 12 月 14 日到 18 日在香港大学召开了“第二次中国科学史国际讨论会”，有 15 名中国学者出席了会议，其中有 5 名数学史工作者，即沈康身、杜石然、李迪、白尚恕、李继闵，杜石然和李迪被聘为大会执行主席。外国学者蓝丽容、林力娜也都在会上宣读了中国数学史论文，有趣的是李迪和林力娜的论文主题基本一致，都是论述中国传统数学中的“算法语言”问题。会议由香港大学中文系筹备，由何丙郁主持。

1984 年 8 月 20 日至 25 日在中国北京召开了“第三次中国科学史国际讨论会”，有中外学者约 100 名出席了会议，会议分 7 个组宣读论文，数学史与物理学史为一组，共收到 19 篇论文，其中数学史有 16 篇，提交论文的中国学者有沈康身、李继闵、钱克仁、罗见今、刘钝、王渝生，日本学者有铃木久男、大竹茂雄、下平和夫，美国学者程贞一（Joseph C. Y. Chen）以及法国的林力娜、马若安（两篇）、詹嘉玲（C. Jami），新加坡的蓝丽容，前苏联的别列兹金娜（与 Бородалски，А. П.、Юшкевич，А. П 联名），其中别列兹金娜等未出席，日本的川原秀城出席会议而未提交论文。

1985 年 7 月 31 日到 8 月 8 日在美国加利福尼亚大学伯克利

分校召开了“第17届国际科学史讨论会”，中国出席23人（其中有台湾省学者3人，在美留学、讲学的大陆人员7人），李迪、梅荣照、李兆华和李国伟（台湾学者）出席会议，都宣读了中国数学史论文，沈康身、李文林提交了论文，但人未出席。外国学者蓝丽容、林力娜、詹嘉玲、程贞一等也都提交并宣读了中国数学史论文。这是从1956年以来时隔29年，中国数学史工作者第一次出席这样的大会。

1985年8月9日到12日，加利福尼亚大学圣地亚哥分校（San Diego）程贞一利用中国学者出席上述会议的机会邀请9名大陆去的中国学者访问圣地亚哥，其中有数学史工作者李迪、梅荣照和李兆华。10日召开关于中国科学史的“一日专题讨论会“（One-day Workshop），梅荣照、李兆华和查有梁在会上宣读了中国数学史论文，李迪的论文属于气象学史和力学史领域。

1986年5月16日到21日在澳大利亚的悉尼大学召开了“第四次中国科学史国际讨论会”，有13名中国学者出席了会议，其中有李迪、何绍庚和罗见今3名数学史工作者，提交并宣读中国数学史论文4篇。蓝丽蓉等也提交并宣读了这方面的论文。

1987年11月1日到5日在日本京都大学召开了“中国科学史国际会议·1987年京都大会”，有6名中国学者出席，其中李迪和杜石然都提交并宣读了中国数学史论文。本次会议是系列性中国科学史国际学术讨论会之外的一次，安排在第四次和第五次之间，有为日本薮内清祝寿的意思（薮内生于1906年）。

1988年8月5日到10日在美国加州大学圣地亚哥分校召开了“第五次中国科学史国际讨论会”，此次会议的规模较大，实际到会的人数为111名，其中有中国学者约40余名（其中有台湾学者8名和几位留美人员）。大陆的数学史工作者有李迪、白尚恕、沈康身、杜石然、李兆华、罗见今、刘钝、王渝生、孙述庆；台湾省有李国伟、洪万生、傅大为。会议设数学和13世纪以后中国

数学两个组，其他组中也有涉及数学史的。会议期间，还自发组织了一次海峡两岸数学史学者的座谈会，法国的马若安也和中国学者一起参加座谈。

此外，还有许多零星的学术交流，这里不再赘述了。

4. 关于人才培养。中华人民共和国国务院学位委员会宣布：从1981年1月1日起实行学位制，同时批准自然科学史研究所、内蒙古师范大学、北京师范大学和辽宁师范大学有数学史硕士学位授予权，严敦杰为数学史博士生指导教师，同年有5人获得硕士学位，其中有一人继续攻读博士学位[①]。这是中国自己培养出来的第一批中国数学史高级人才。到1988年获得数学史硕士学位的总共有20余人，其中有3人是学外国数学史的。1988年底在校的硕士学位研究生全国约有10人，博士生1人。

单是培养硕士研究生无法满足日益增长的社会需要，因此陆续在一些地方举办数学史讲习班，其中最重要的一次是原教育部委托北京师范大学于1984年7月到8月主办的“中外数学史讲习班”。这次讲习班有来自全国将近百名高校教师和少数中学教师参加学习，担任中国数学史主讲的是白尚恕、沈康身、李继闵和李迪，并且做了专题学术报告，被邀请做中国数学史报告的还有梁宗巨、杜石然和梅荣照。1986年7月至8月间由国家教委批准、由徐州师范学院和北京师范大学在徐州举办了“《九章算术》与《数书九章》讲习班”，是第一次讲习班的继续和深入，会上成立了“全国高校数学史教学研究会筹委会”。高等学校主要的中国数学史家沈康身、白尚恕、李迪、李继闵等出席了讲习班并担任主讲。

---

① 在国外以中国数学史论文获得博士学位的人有，如三上义夫（1946）、别列兹金娜（1961，候补博士）、蓝丽容（1966）、李倍始（1971）、林力娜（1982）、詹嘉玲（1985）等等。

第五章 中国传统数学的特点

中国传统数学，一般是指在与西方数学合流之前在我国自行产生、独立发展起来的数学的方法与理论。它源远流长，自周代“算术”成为独立学科到19世纪初汇于世界数学潮流，它经历了大约两三千年的漫长历程。

古代中国数学有其自身的历史渊源和独特的发展道路。它持续不断，长期发达，成就辉煌，呈现出鲜明异常的“东方数学”的色彩，对于世界数学发展的历史进程有着深远的影响。

第一节 中国传统数学的独创性

数学是产生最早的学科之一；数学的发祥地也就是文化起源之所在。

古代文化大约已有5000年可考的历史。世界最古的五大文明发源地[①]，都产生于北温带南部[②]，南北差距不大，却分散在不同的经度上，东西横跨欧亚大陆。因此，古代文化的发展自然逐渐形成了东方和西方两大主流[③]。古代东、西方文明间的联系有一个形成过程。公元前3000年代末，那些最古老的文明在广阔的原始世界中只是几个孤立的绿洲。到了公元前2000年代中叶，随着叙

① 即：尼罗河流域古埃及文明、幼发拉底与底格里斯两河流域苏美尔、阿卡德文明、印度河流域文明、黄河流域文明和爱琴海上的克里特文明。

② 约在北回归线至北纬40度之间。

③ 通常认为，东方文化起源于中国，以黄河、长江流域为文化交流的枢纽；西方文化起源于巴比伦，以幼发拉底和底格里斯两河流域为文化荟萃的区域。

利亚、小亚细亚一带形成国家，埃及、两河流域和克里特·迈锡尼文明已经连接起来。而到公元前1000年代中叶，随着波斯帝国从伊朗高原兴起，从印度到地中海区域之间也开始有了联系。与古代其它文明中心不同，中国地处远东，由于帕米尔高原和喜马拉雅山的屏蔽，它长期处于相对独立的地位。直到公元前1000年代中叶，中国不知帕米尔以西的国家，其它文明古国也不知道东方还有一个文明高度发展的中国。

1. 数学在中国的起源，可以追溯到半坡遗址的仰韶文化[①]，距今已有五六千年。而“算术”何时在中国成为一门独立的学科，尚无定论。据《周礼》记载，早在周公时代，“数”便作为教育贵族子弟的“六艺”[②]之一，开始形成一个学科。到了“幽厉之世”（公元前9世纪至前8世纪），已经有了一批世代相承掌管天文历法而精通数学的“畴人”[③]。我国的筹算在春秋战国时期无疑已相当普及。古代数学早期发达的事实表明，当中国还处于“与世隔绝”之时，自有独特风格的算术便已在神州大地形成。

然而，以往一些西方学者，由于缺乏对中国古代数学渊源的研究以及“欧洲文化中心论”的偏见，认为中国数学是受西方数学的影响而发展起来的。例如，斯科特（J. F. Scott）认为汉代

① 西安半坡村遗址距今的年代不仅被视为汉字起源年代的指标，也是数与形概念的源起。

② 《周礼》：“保氏……养国子以道，乃教之六艺，一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数。”

③ 《史记·历书》：“幽、厉之世，周室微，陪臣执政。史不记时，君不告朔。故畴人子弟分散，或在诸侯，或在夷狄。”

以前希腊文化便已传入中国并影响了中算的发展。[①] 而斯特洛伊克（D. J. Struik）则断言“希腊和巴比伦影响的问题深刻地决定着古代印度和中国的数学研究。”[②] 他竟说中国“没有存在任何数学著作能够确定地溯源于前耶稣时代。”[③] 其实这些议论把许多基本史实都搞错了。

英国著名学者李约瑟（Joseph Needam）基于多年对中国科技史的研究，他排除了过去西方数学史家的偏见，认为中国古代数学是自己独立发展的。对于古代东西方数学间的相互影响与交流问题，他有精彩的论述。他写道：“在谈到这个问题时，我们有些犹豫，因为在中国数学与旧大陆其他重要文化区的数学之间似乎发生过的接触，把我们收集到的资料放在一起也没有多少。首先，古代美索不达米亚文化在中国的具体影响是有限的……此外，中国对分数的处理与古埃及是根本不同的。但是，当问到有什么数学概念似乎是从中国向南方和西方传播过去的时候，我们却发现有一张相当可观的清单。”[④]

的确，从中国古代文献中找不到任何关于中算源于西方的记载与痕迹。而有关数学的起源与算术的形成的叙述，“隶首作数”、

① 〔英〕斯科特著《数学史》：“塞流卡斯王朝为了同东方保持持久联系所作的努力并不是没有效果的，有证据说明希腊文化曾传入中国，特别是汉朝期间。”“从公元前202年建立起来的汉朝，开始了一个复兴时期。这就在远东开始了一个学术时期。希腊文化当时已开始传入中国，并且在这个东西方的交流中，产生了对于追求知识的真正兴趣，数学则分享了其中的一份。”见商务印书馆，中译本，pp. 110～111

② D. J. 斯特洛伊克. 数学简史. 关娴译，北京：科学出版社，1956. 22

③ D. J. 斯特洛伊克. 数学简史. 关娴译，北京：科学出版社，1956. 22

④ 李约瑟. 中国科学技术史，卷三. 北京：科学出版社，1978. 323

“大挠甲子”[①]、“倕为规矩”[②]、“周公制《九章》”[③]之说，虽然带有传说的性质，所论亦不尽完全相同，但这些“数学的创造者”无一不是炎黄子孙。可见中国自有文字记载以来，始终认为“算术”是华夏民族自己的独创。

2. 中国古代数学的独创性，不仅是说数学之在古代中国是“土生的”，而且还是“土长的”。也就是说，中国传统数学的发展带有封闭性。李约瑟曾经用下面一段话来评述外域文化对中国的影响。他说：“我们最后的结论大概是这样：中国和它的西方邻国以及南方邻国之间的交往和反应，要比一向所认为的多得多。尽管如此，中国思想和文化模式的基本格调，却保持着明显的、从未间断的自发性。这是中国‘与世隔绝’的真正涵义。过去，中国是和外界有接触的，但是，这种接触从来没有多到足以影响它所特有文化以及科学的格调。”[④]

诚然，中国和中亚各国之间以及中国和印度之间很早便开始了文化交流。在南北朝至隋唐时期，伴随着佛教的流传，中印文化交流有了很大发展。印度天文学家曾在唐朝的司天监供职[⑤]，印度的天文、数学著作也曾流传到中国[⑥]。但它们对中国数学产生的影响是微小的，有迹可寻的仅大数与小数的记法而已。宋元时期，特别是13世纪，随着蒙古人的西进，中国与伊斯兰国家之间的文

① 〔唐〕司马贞《史记·历书》“索隐”引《世本》之说：“黄帝使羲和占日，常仪以占月，臾区占星气，伶伦造律吕，大挠作甲子，隶首作算数，容成综斯六术而著调历。”

② 〔周〕尸佼《尸子》卷下：“古者倕为规矩、准绳，使天下仿焉。”

③ 〔魏〕刘徽《九章算术注序》：“周公制礼而有九数，九数之流，则九章是矣。”此说以及“黄帝著九章”之说为历代文献广为征引。

④ 李约瑟．中国科学技术史，卷一．北京：科学出版社，1975．337

⑤ 如瞿昙悉达曾在唐朝任太史监，他译天竺《九执历》，编《开元占经》。

⑥ 据《隋书·经籍志》载，印度天算书译为汉文的有《婆罗门算法》三卷，《婆罗门阴阳算历》一卷，《婆罗门算经》三卷。

化交流有了更显著的发展。伊斯兰国家的天文数学著作传入中国[①]，阿拉伯数码、“土盘算法”也传入了我国。但这些对中国传统数学也未有任何明显的影响[②]。认为13世纪后期欧几里得几何学已经过阿拉伯人传入中国的说法[③]，不过是一种根据不足的推测。西方数学的首次传入是在16世纪末叶。此后，西学东渐经历了两三百年的反复曲折，直到19世纪中叶西方数学第二次传入之后，中国传统数学才改弦易辙，最终地汇合于世界数学的潮流之中。

中国古代数学的封闭性不能简单地归之于保守与排外。因为各种文化的交流并非一律并蓄兼收，总是根据自身发展的需要有所选择与改造，而且文化传播的方向，一般总是由高向低。李约瑟说得好：“尽管中国早先几乎‘与世隔绝’，并存在一些我们即将探讨的排外的社会因素，但在公元前250年到公元1250年之间，从中国传出的东西比传入的东西多得多，看来却是十分可能的事。只有到了较晚的年代，来自南方或西方的影响才开始成为值得注意的东西，尽管如此，这些影响当时也很少在中国扎下根来[④]。

所谓中国传统数学的“封闭性”，其实更确切地说，它表现为传统的连续性与发展的持久性。

3. 中国传统数学长期发展的持续性在世界是罕见的。正如日

---

① 据《元秘书监志》卷七“回回书籍”条载，计有《π 忽列的四擘算法段数》十五部，《罕里连窟允解算法段目》三部，《撒唯那罕答昔牙诸般算法段目并仪式》十七部，《呵些必牙诸般算法》八部等，并未译为中文。

② 一个明显的证明是，甚至元代王恂、郭守敬等人编制的《授时历》中还看不到任何伊斯兰数学和回历的影响。

③ 李约瑟认为：“欧几里得几何学大约在1275年通过阿拉伯人第一次传到中国，但没有多少学者对它感兴趣，即使有过一个译本，不久也就失传了。”

④ 李约瑟，中国科学技术史，卷三．北京：科学出版社，1978．28

本著名数学史家三上义夫所说："中国之算学，其发达已有二三千年之历史。以算学之发达，包含于如此之大文明中而有如此久长之历史，世界诸国未尝有也。就此点言之，印度或可与中国比较；然其它各国之算学史：在希腊则自纪元前6世纪至纪元后4世纪，不过有1000年之期；阿拉伯则仅限于自八世纪至十二三世纪；日本之算学发达，系在德川时代；欧洲现在诸国，亦自10世纪时始有算学之历史。然则中国之算学史，其有长期之发展，不能不谓为世界中稀有之例也。"[①]

中国数学的传统连续性有其文化史上的根源。综观人类的文明史，中国在世界各文明古国中，是唯一的文明传统未曾中断的古国。如所周知，在公元前2000年代，印度河流域文明，克里特·迈锡尼文明都先后灭亡了[②]。公元前1000年代前半期，埃及和两河流域这两个世界最古老的文明中心及邻近的其它文明古国[③]基本上已失去了政治上的独立[④]。它们的历史地位为希腊与罗马所代替。而到了公元476年西罗马灭亡，西方古代文明至此实际中断了[⑤]。东方在公元前3世纪兴起的孔雀帝国，只是昙花一现。中国的古代文明始于夏代而其传统奠基于春秋。一部《史记》，上起五帝，下迄汉武，高度体现出中国文明发展的连续性。尔后，尽管中国历史上出现分分合合的各种政治局面，但是中国的文明从

---

① 三上义夫．中国算学之特色，绪论．林科棠译．北京：商务印书馆，1933．1

② 印度河流域文明约灭亡于公元前1750年；克里特·迈锡尼文明先后约在公元前15世纪、公元前12世纪灭亡。

③ 包括叙利亚、巴勒斯坦和小亚细亚的文明古国。

④ 这一时期，亚述帝国兴起于两河流域、波斯帝国兴起于伊朗高原，它们先后征服了埃及和西亚的古文明地区。

⑤ 甚至公元前2至1世纪间，在古罗马制下，曾盛行于西亚各国的楔形文字、古埃及的象形文字和其它两种文字都在此时逐渐失传。古埃及、西亚文明的传统基本已经中断。

未中断，廿四史相继有序就是这种连续性的明显标志。

中国数学传统的连续性，表现在众多的方面。无论历代数学典籍体例的一致性，或者数学的各分支科目发展的继承性，抑或计算工具使用的一贯性，都是很突出的。中国古代的数学理论，诸如方程、开方、勾股、重差、求一等算法，在中算史上源远流长，尽管许多重要文献早已失佚，但其发展演进的来龙去脉迄今清晰可辨。后世的新成果，总可以在其前代人的工作中找到它的生长点和胚芽，它的根源常常可以追溯到《九章算术》或更早。或许有人会以求一术为例来加以诘难，甚至某些外国学者曾以此来否认中国古代数学的独创性[①]。但近期的深入研究表明，求一术与古代中国的不定分析，它的理论根源在于分数近似法，这已从汉代历法计算的应用中得到证实。

中国古代数学的独创性是不容置疑的。因而将中国古代数学称之为“传统数学”，也是很恰当的。

第二节　中国传统数学的社会性

1. 鲜明的社会性是中国传统数学最基本的特点。而中国传统数学的社会性首先表现为它的实用性。

中国古代数学一开始便同天文历法结下了不解之缘。正如李约瑟所说：“谈到社会因素时，很明显的是，在整个中国历史中，数学的重要性主要是在于它与历法有关。在《畴人传》中很难找到一个数学家不受诏参与或帮助他那个时代的历法革新工作。”[②]

中国数学的早期发展是同天文学研究的需要密切联系在一起

---

① 例如，赫师慎等把中国的“大衍求一术”说成来源于印度的“库塔卡”。

② 李约瑟. 中国科学技术史，卷三. 北京：科学出版社，1978. 339

的。“天文学只有借助于数学才能发展，”[①] 在古代中国尤其如此。中国古代天文学是和农业生产相结合而发展的；“观察天象，敬授民时”，历法的编算成为中国古代天文学的中心。而西方天文学主要偏重于宇宙结构的探讨。古代中国与西方天文学的差异，影响（甚至决定）了各自数学发展的方向。中国古代天文学中由于历法推算与数据处理发展了代数（计算）的方法；而西方天文学天体结构与位置的推算发展了几何的方法。我国古代历法不像西方历法那样仅仅包括历日的安排，它还有太阳、月亮的运动、日月食推算、五大行星出没、各节气晷影长短以及每月南中天星象等内容，实际上它是一个天文年历；它的编制涉及各种复杂的测算问题。因而，通常用“中国古代数理天文学”一词来泛指中国古历法[②]。

中国古代早期的数学与天文学是密不可分的。在中国数学史上最有影响的“算经十书”，其中最早的《周髀》就是一部天文数学著作。由于“中国古历法所有天文数据基本上都用分数来表示，分数运算成为古历法中一很大项目。”[③] 这促使分数算法在我国“早熟”。而天文数据的处理又引导出内插法的产生。窥天测地的操作必然带来有关直角三角形性质（即勾股测量）的研究。《周髀》正是从天文学的需要方面来反映了早期数学在分数运算、一次内插法和勾股测量等应用上的一些成就。值得注意的是内插法在中国古代历法中有长期的发展与卓越的成就，这又同中国古代数学特点相关。严敦杰指出：“中国古历法中发明内插法是与中国古代数学发展的特点相关的。中国古代平面几何中没有引进角度

① 恩格斯．自然辩证法．科学历史摘要．北京：人民出版社，1956．149

② 严敦杰．中国古代数理天文学的特点．见：科技史文集，第一辑．上海：上海科学技术出版社，1978

③ 严敦杰．中国古代数理天文学的特点．见：科技史文集，第一辑．上海：上海科学技术出版社，1978

概念，在直角三角形中只有线段与线段的计算关系，没有边与角的计算关系。”[①] 古代历法与数学的相互影响与促进，在中国天算史上是不乏例证的。

秦汉以来虽然数学与天文学完全分家，但是两者之间的联系从未间断，数学的新成果不断应用于历法；而历法中发展起来的一些新算法也或迟或早地在数学著作中得到反映。中算史上许多具有世界意义的杰出成就是来自历法推算的。例如，举世闻名的“大衍求一术”（一次同余式组解法）产生于历法“上元积年”的推算；由于推算日、月、五星行度的需要，中算家创立了“招差术”（高次内插法）；而由于调整历法数据的要求，历算家发展了分数近似算法，“通其率”术与“调日法”在数的有理逼近方面达到了很高的水平。还应当看到，由于古代历法推算往往被蒙上神秘的外纱，或者算法过于艰深专门而难于推广应用，有许多历家的算法未能为数学著作所收录，甚至被隐匿不彰。因此，发掘“历法中的数学”是中国数学史研究中一项十分重要而艰巨的任务。

中国传统数学的实用性，还表现在我国古代数学典籍具有浓厚的应用数学的色彩，这与古代希腊数学追求纯粹“理念”形成强烈的对照。数学之在中国，至迟从汉代开始便成了一个独立的学科，尔后两千年来数学著述世代不绝。然而，通观中国古典数学著作的内容，几乎都与当时社会生活的实际需要有着密切的关系。这不仅表现在从《九章算术》开始，中国的算学经典基本上都遵从问题集解的体例编纂而成，而且它所涉及的内容反映了当时社会政治、经济、军事、文化等方面某些实际情况和需要。以致史学家们常常把古代数学典籍作为研究中国古代社会经济生活、典章制度（特别是度量衡制度），以及工程技术（例如土木建

① 引自严敦杰《中国古代数理天文学的特点》一文。

筑、地图测绘）等方面的珍贵史料[1]。而明代中期以后兴起的珠算著作，所论则更是直接应用于商业等方面的计算技术。

为社会实际服务是中国古代数学的传统，也是它的特色。如果与外国古代数学著作相比较，中国传统数学在学以致用方面可以独树一帜。不但古希腊几何学与之迥然不同，即使印度数学和阿拉伯数学在实用性方面也远不如中国数学这样鲜明、突出[2]。

2. 中国传统数学的社会性，还表现在数学的教育与研究始终置于政府的控制之下，使之服务于统治阶级的需要。

远在周代，数学作为贵族子弟教育内容的“六艺”之一便列入官学。唐代初期以后，“十部算经”由国家颁布行用于国子监，并作为科举考试所依据的经典。数学典籍的编纂、增修和注释一般是在政府官员的主持下进行的。《九章算术》是经过“汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌”等人的删补才流行于世的；“算经十书”是唐代昌乐县男李淳风与国子监算学博士梁述等“奉诏”注释的；清代的数学百科全书《数理精蕴》则是在康熙皇帝亲自主持下编写的。像刘徽这样的布衣数学家有著述传世，在中国数学史上是不多见的[3]，而且这些私人的著作须经官方审定才能得以

---

[1] 这方面已有许多专文。例如，以《九章算术》粟米、商功、衰分、均输等章古算题的记载来考证汉代的经济、徭役、度量衡制度等，被认为《九章》所载有一定历史根据，为分析研究提供很好的参考资料。《孙子算经》卷上载有度量衡各种单位的换算表，对研究我国度量衡制度的发展有一定价值。《周髀》、《海岛》被认为是“世界上最早的一部应用测量学”，在测量史上有重要意义。而《数书九章》更是研究南宋社会经济、军事、天文、气象、土木建筑等许多领域的历史文献的补充和旁证。

[2] 沈康身曾将中国古代数学与古代外国三部数学名著相对比。希腊欧几里得《几何原本》（公元前4世纪）十三卷没有一处涉及应用问题；印度圣使 Aryabhata 的《圣使文集》（公元499年）第二卷论数学，其中与实际有关的题目仅有五问；中亚细亚的阿尔·花拉子模《代数》（公元825年）全书六章，大量例题纯属数值计算，牵涉实际仅一孤例。

[3] 有趣的是，刘徽死后800百多年还被宋徽宗追封为“淄乡男”。

行用。李约瑟曾以《九章算术》为例来说明中国古代数学的这一特点。他写道："从它的社会根源来看，它与官僚政府组织有密切关系，并且专门致力于统治官员所要解决的（或教导别人去解决的）问题。土地的丈量、谷物容积、堤坝和河渠的修建、税收、兑换率——这些似乎都是最重要的实际问题。'为数学'而数学的场合极少。"[①]

中国古代由官家开办的数学教育，的确是为培养政府业务行政部门的专业计算人员而设立的。许多数学典籍也是为这一目标而编写的教科书。北周甄鸾编著的《五曹算经》就是一个明显的例子。"五曹"即田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹，是当时地方行政业务的分科；《五曹算经》就是一册为地方行政职员编写的应用算术书。"十部算经"大都具有这样的性质。因而，认为中国传统的数学教育带有技术教育的性质，不是没有道理的。

3. 中国传统数学的社会性，也还表现在中算家的数学论著深受历史上各种社会思潮、哲学流派以至宗教神学的影响，被打上形形色色的印记。

中国早期的数学与哲学往往互相融合，浑为一体。数学的成果往往带有一种哲学思辩的色彩，而哲学观点又往往借助于数学的语言来描述。先秦哲学著作中包含着相当精湛而丰富的数学内容。《墨经》是先秦时期的一部精微简奥、颖异深刻的哲学论著，也是自然科学和社会科学的宝典。其中关于数学，特别是几何学（形学）问题的学说，据初步研究竟有 19 条之多[②]。虽然都是一些基本的数学名词的界说或朴素的数学命题之类，但它却含有丰富

① 李约瑟．中国科学技术史，卷三．北京：科学出版社，1978．341～342

② 方孝博．墨经中的数学与物理学．北京：中国社会科学出版社，1983

的数学概念、严密的逻辑推理和深邃的数理哲学思想[①]。尤其是先秦哲学中丰富多彩的无限数学观念，对于后世数学中极限方法的成功应用无疑起着基础的作用[②]。

中国传统数学体系的酝酿与形成大抵是在秦汉时期。封建社会初期生产力的迅速发展，科学技术的进步，对数学的前进是一个巨大的推动力。而反映新兴地主阶级思想的先秦诸子学术对于数学体系的形成有着积极的影响。百家争鸣，逻辑思想的发展，对数学的理论化、系统化起着基础作用。以《九章算术》为代表的数学体系，正是新兴地主阶级的学术思想与科学成就在数学方面的反映。汉代以后，儒家学说成为中国封建社会的正统思想。儒家以伦理道德为核心的哲学体系，要求对自然界的解释为其伦理学说服务。儒家以直观性和思辩性为特征的自然观，表现在自然科学上是注重实用，偏向实践经验[③]，而对理论抱“适可而止”的态度。儒家崇尚往古，主张天道不变，其学术思想具有极为顽固的抗变性与保守性。这些在中国封建社会中占据统治地位的观念形态对于传统数学理论的发展确实产生过比较深远的影响。

远古时代的数学、天文又与星占、卜筮之类相联系[④]。《周

---

① 例如，《墨经》中对点、线、面、体，圆与方，全体和部分等概念都加以界说，其中将圆定义为“一中同长也”，与现代同义。《墨经》关于“端”的概念、时空观念等充满辩证思想。

② 惠施提出的“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一。”是中算史上“无穷大”、“无穷小”概念的最早表述；公孙龙提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的命题，包涵着极限概念的萌芽，它与《墨子》书中关于“端”的命题，表达了古代关于无限可分性的思想。可以看作后来数学中割圆术等极限方法的理论基础。

③ 中国古代科学理论往往与人们的直接经验和直观感受相联系，它使得有独立人格和意志的上帝在中国古代科学理论中找不到插足之地，这与神学自然观统治的中世纪欧洲不同。

④ 《左传》云：“龟，象也；筮，数也；物生而后有象，象而后有滋，滋而后有数。”殷商时代的巫人既用蓍草占卜，也用于数学演算。

易》是我国最古老的一部占筮书，但从科学史的角度看，它的内容还包含天文、数学等方面的知识[①]。《周易》从“理数统一”的思想出发，提出了一种运用数学去范围天地，曲成万物的观点，它曾推动人们探索数的变化规律。不过《周易》中的神学唯心主义思想和象数神秘主义，对于以后数学的发展则起到了消极阻碍的作用。

在中国的封建时代，数学只是处在传统学术的附庸地位。数学不仅被纳入了经学的轨道，而且变成了宣扬教义的“恭顺婢女”。从东汉开始，一些经学家便用数学来注解儒家经籍，甄鸾的《五经算术》可算做用数学来附会儒经的一个例子。宋代的儒家又窃取道教徒的数字神秘主义来注解《周易》经传。“河图”、“洛书”之类便是宋代道学中的象数神秘主义的代表作 。

所谓中国传统数学的“社会性”，是指在中国长期封建专制的政治制度的控制下，古代数学对于社会有着直接的依从关系。传统数学的内容具有实用性的鲜明特点和理论技术化的明显倾向。而且这种特点和倾向到了封建社会末期变得愈加显著。这不仅与古代西方数学形成强烈的对比，即使在“东方数学”中也是十分典型的。

第三节 中国传统数学的东方色彩

如前所述，由于远古历史、地理条件的影响，古代文化的发展形成了东方和西方两大主流。数学作为古老文化的组成部分，自然也形成了东方与西方两种迥然不同风格的体系。

然而，现今流行的西方学者的世界数学史著作中，对所谓“东方数学”与“西方数学”的划分有着不同理解。通常是把希腊

---

① 《周易》中的卦爻、占卜中包含着排列、组合以及同余等数学概念的胚芽。

式的以论证几何为主的逻辑演绎体系的数学称为"西方数学"，或"西方式的数学"；而把以算术、代数和直观几何为基本内容的算法体系的数学称为"东方数学"，或"东方起源"。至于"东方"所指则不相同[1]，多指巴比伦或是印度；而我们将会看到这个"东方"应指中国才算确当[2]。

中国传统数学是东方式数学的典型。形数结合，以算为主，使用算器，建立一套算法体系是中国传统数学的显著特色。

中国传统数学实用性的特征，决定了它的发展以解决实际应用问题和提高计算技术为其主要目标。

1. 中国古代数学称为"算术"，其原始意义是运用算筹的技术。算筹是我国古代特有的计算工具。"算术"这个名称恰当地概括了传统数学使用算器，以算为中心的特点。

纯数学以现实世界的数量关系与空间形式为其研究对象。中国古代数学包含有丰富的几何内容；中算家在面积、体积和勾股理论方面取得了卓越的成就。然而，与古代希腊几何学迥然不同，中国古代的图形研究表现为数量的计算，它以长度、面积和体积等度量为主要对象，而一般不注重图形性质与位置关系的研究，甚至中国古代几何学不讨论角的性质与度量。几何对象的度量化，使中算"以算为主"的特点得以充分体现；而形数结合突出地表现为几何方法与代数方法的相互渗透。一方面，古代算术与代数中许多理论与方法（例如比率算法、高次方程数值解法等）在几何领域广泛应用，表现为"几何的代数化"倾向；另一方面，几何的原理与方法又被成功地用于代数、数论等领域，例如开方术、整

---

[1] 例如，D. J. 斯特洛伊克的著作将埃及、巴比伦、印度和中国列入"古代的东方"；而斯科特的《数学史》中"东方的数学"一章，仅论及印度数学与中国数学。

[2] 吴文俊的文章明确提出这一观点。钱宝琮、李约瑟的著作也持这种观点。李约瑟的著作中有专门的章节比较中国与西方的数学。

勾股数一般公式等都源于几何[1]。数与形的这种美妙结合，使得中国古代数学在理论与应用两方面都获得了很大的成就。

中国古代数学一开始就和算器的应用密不可分[2]。虽然世界各民族的数学发展史上都使用过不同的算器，但是很少有像中算这样对算器的明显依赖性[3]，以致可以用“筹算”二字来代表中国古代的数学。中国古代从未有过西方那样的笔算；后来算经中的演草也只是筹算的简要记录。算筹是在计算机发明以前我国所独创并且是最有效的计算工具。中国古代计算技术的发达可以说是受惠于筹的。我国很早就使用十进位值制记数法，便与筹的使用密切相关。先进的记数法与计算工具使中国古代在计算技术方面居于世界遥遥领先的地位。筹算以后发展为珠算。明代以来，珠算广泛应用于商业等实际部门，使中国传统数学依赖算器，发展计算技术的特点表现得更为充分。

中国古代的筹算决不限于简单的数值计算，而是发展了一套内容十分丰富的“筹式”演算。中算家不仅利用筹码不同的“位”来表示不同的“值”，发明了十进位值制记数法，而且还利用筹在算板上各种相对位置排列成特定的数学模式，用以描述某种类型的实际应用问题。例如列衰、盈朒、“方程”诸术所列筹式描述了实际中常见的比例问题和线性问题；而天元、四元诸式，则刻画了高次方程问题。演算对象由“数”发展到“式”，即由数量进到数量关系的研究，后者具有更一般的代数的性质。筹式以不同的“位”代表意义不同的“量”；以不同的位置关系表示特定的

---

① 这实际上是一种“代数几何化”的表现。但这在中国传统数学中并未发展成为主要的倾向。

② П. А. АПОКИН 等《计算机发展史》写道：“在计算工具的历史上中国占了一个光荣的地位。在古老的计算工具的样品中，最古老的是中国的。”

③ 印度人用红砂布地或平摊盘上，用竹棒写数或做算术运算。这种“土盘算法”，实际是写算，与笔算之不同仅在于它可以随写随抹，不保留运算的中间过程。

数量关系。在这些筹所规定的不同“位”上，可以布列任意的数码。它们随着实际问题的不同而取不同的数值，因而，筹式本身就具有代数符号的性质。可以认为，中国古代的筹式就是一种特殊的代数符号系统[①]。

2. 以算为主，决定了中国传统数学的成果表现为算法的形式；而数学问题的模式化和以筹为算具，便带来了计算方法程序化的特征。有人曾将中国传统数学与今天的计算技术对比，认为如果算筹相应于电子计算机可以看作“硬件”的话，那末中国古代的“算术”可以比作电子计算机计算的程序设计，是一种“软件”的思想。这种看法是很有道理的。中国的筹算不用运算符号，无须保留运算的中间过程，只要求通过筹式的逐步变换而最终获得问题的解答。因此，中国古代数学著作中的“术”，都是用一套一套的“程序语言”所描写的程序化算法。各种不同筹式都有其基本的变换法则和固定的演算程序。例如，“方程”这一筹式以遍乘、直除（累减）为基本变换，而“方程术”便是反复施行这两种基本变换而逐个消元求解的演算程序。中算家善于运用演算的对称性、循环性等特点，将演算程序设计得十分简捷而巧妙。例如开方术、增乘开方法、大衍求一术等在筹算程序的设计方面都达到很高的水平。如果说古希腊的数学家以发现数学的定理为乐趣，那么中算家则以创造出精致的算法为己任。这种设计筹式、算法之风气在中算史上长盛不衰，清代李锐所设计的“调日法术”和“求强弱术”等都可以说是我国古代传统的遗风。

中国传统数学发展的另一个目标是提高计算技术，即提高数字计算的速度与准确性。这通常包括算具和算法两方面的改进。明

---

① 李约瑟称之为“位置的代数学”。他写道：“在演算过程中，筹算盘上的数字是按照它们所代表的量的类别（未知数、幂等）而占有一定的位置的。一种稳固的、划一的数学图式体系就建立起来了。”

代以来珠算的普遍使用正是为了适应社会发展，尤其是商业发达对计算技术的更高要求。而以改进筹算或珠算的数值计算（主要是乘、除运算）为主的所谓“实用算术”，在中国古代数学著作中占有相当的地位。虽然这属于我国古代传统数学中的“普及”部分，但却受到历代的重视。特别是在明代以后，曾一度成为我国数学发展的主流。

3. 古代数学大体可以分为两种不同类型。一种是长于逻辑推理，一种是发展计算方法。这也大致代表了西方和东方两类数学的不同特点。虽然以算为主的某些特点也为东方的古代印度数学和中世纪的阿拉伯数学所具有，[①]但是，中国传统数学在这方面更具有典型性。中算对算具的依赖性和形成一整套程序化算法的特点尤为突出。例如，印度和阿拉伯在历史上虽然也使用过土盘等算具，但都是辅助性的，主要还是使用笔算，与中国长期使用算筹和珠算的情形大不相同，自然也没有形成像中国这样一贯的与“硬件”相对应的整套的“软件”。

中国传统数学以算为主，决不等于中算家不曾使用逻辑论证，也不等于中国古代数学没有自身的理论体系。“寓理于算”和理论的高度精炼，是中国传统数学理论的重要特征。

任何完整、系统的算法都不可能建立在单纯经验的基础之上。思辩性是数学固有的特征。不仅数学的概念是抽象的、思辩的，而且数学的方法也是抽象的、思辩的。不可能设想中国数学史上例如球体积的精确公式、整勾股弦的一般公式，这类复杂的计算公式，得自经验的总结；也不可能想象例如开方术、大衍求一术这样美妙的算法没有一定的理论作指导。只是中国传统数学以追求

① 现在一般数学史著作认为，早期的印度数学受到巴比伦和希腊的影响，而后来又受到中国的影响。从印度数学所表现的特点看，它受中国的影响是明显的，李约瑟支持这种观点。

实用性为主要目的，重“法”轻“理”，一般数学著作中只叙述一个个的算法，而它的算理常常是隐而不显。

“寓理于算”，可以说是中国传统数学理论在表现形式上的一个特点。中算家经常将其依据的算理蕴涵于演算的步骤之中，起到“不言而喻，不证自明”的作用。例如大衍求一术，它所要解决的是复杂的一次同余式组问题，而依照孙子剩余定理所给出的求解步骤具有明显的构造性，使得这一解法所依据的原理和设计的构思，脉络清晰地体现在其算法程序中，让人感到自然而信服。此外，算经中篇目的划分，题序的安排，一般也或多或少地体现出其理论归属或内在的逻辑联系。例如《海岛》九问由简到繁的编排反映了重差诸术“类推衍化”的造术发展过程；《九章算术》商功章的求积公式采取柱、锥、台体的方、圆对比的排列，暗示出这些公式的类似性是通过截面原理推导的结果。

然而，人们对中国传统数学中蕴涵的算理的了解，主要是依靠中算家对于算经的注释。古代经典，深奥难懂，注经之风，世代相传。算经的注解中难免有时加上注释者的体会与创作，但是中算家的注经目的在于“以究古人之意”，因而可以认为它基本上保持着原著的理论风貌。中国古代算经的注释者历代不乏其人，知名的有赵爽、刘徽、祖冲之、李淳风、甄鸾等人，其中不少人因此而成为著名的数学家。可惜这些珍贵的著述，例如祖冲之父子的论著，都早已失传或残缺。从流传至今的文献看，刘徽的《九章算术注》堪称中国传统数学理论的精华。

刘徽的著述表明，中国传统数学并非没有理论的证明。刘徽主张“析理以辞，解体用图”。这里的“辞”就是逻辑，“图”则是指图形直观，即是说把逻辑推理与直观分析的方法结合起来，以论证数学结论的真确性。《九章算术注》中包含有丰富的逻辑内容。许多重要的数学概念，诸如率、正负数、“方程”等都给出了相当明确而精辟的定义。所涉及的推理方法，既有归纳，也有演绎。而

证明方法，不仅有综合法、分析法，而且有时还兼用反证法。许多数学结论的证明是完整而严谨的。例如，刘徽用面积的割补来证明整勾股弦之一般表达式便是一个使用综合法的精彩例子。那种认为“在古代中国的数学思想中，最大的缺点是缺少严格求证的思想”[①] 的说法，是缺乏根据的误解。中国古代数学是绝不能与埃及“纸草”和巴比伦“泥版”混为一谈的。

《九章算术》与刘徽注的研究也还表明，中国传统数学具有自己独特的理论体系，它以理论的高度概括、精炼为特征。中算家善于从错综复杂的数学现象中抽象出深刻的数学概念，提炼出一般的数学原理，而从非常简单的基本原理出发解决重大的理论关键问题。例如，中算丰富多彩的几何理论完全建立在“出入相补”、“截面相比”、“不失本率”、“刘徽原理”等几个为数极少而又十分简明的原理的基础之上；而率概念所规定的基本性质成为处理线性问题的列衰、盈亏、“方程”诸术统一的逻辑基础。中国传统几何学以勾股形代替一般三角形来处理直线形问题，因而不讨论角的性质与度量，也避开了平行线与一般相似形的繁琐理论，使其几何理论的结构异常简明扼要，却收到“异曲同工”的实际效果，这无疑更便于理论的应用。换句话说，中国传统数学理论，乃是为着建立那些在实际中有直接应用的数学方法而构造的最为简单、精巧的理论建筑物。

中国的传统数学没有形成像欧几里得《几何原本》那样的公理化体系，这主要是由它的实用性和“以算为主”的特点所决定

① 这一论点最早见于三上义夫，而在西方广为流传，并认为是东方数学的弱点。例如，D. J. 斯特洛伊克《数学简史》写道：“在一切古代东方数学中没有任何地方足以使我们发现我们所谓证明的任何企图。从未用过推理，而仅仅是列出某些规则来：‘如此做，做这个’。我们无从知道定理被发现的途径。”

的[1]。反过来说，如果要求一个以发展算法和计算技术为中心的古代数学理论体系采用公理化结构，不仅完全脱离了那个时代，而且是华而不实的。关于这一点，我们只要回顾一下至少直到本世纪五六十年代中小学的算术与代数教材就不难明了[2]。

第四节　关于中国传统数学的理论成就与局限性的评论

讨论中国传统数学的得失，实际上是评价东方数学在世界数学发展史上的作用与地位的问题。自然，这是一个困难而复杂、并会引起激烈争论的问题。由于这个问题带有根本的性质，是回避不了的。但是，现在离最终的结论还很遥远[3]，这里只为纠正某些西方学者的误解与偏见。

1. 数学，作为一门精确的科学与工具，它有自己固有的特征。“这些特征：第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性，最后是它的应用的极端广泛。”[4] 抽象性、精确性与应用广泛性，作为数学的一般特征，它

---

① 当然，正如许多论著所指出的，希腊数学的公理化体系是与古希腊形式逻辑的发展相联系的；而中国古代逻辑以发展辩证逻辑为主，与西方大相径庭。这自然也是中国古代数学未采用公理化体系的一个因素。

② 对此，斯特洛伊克有一段有趣的话：“对于我们这些被欧几里得的严格推理所教育的人，这整个的东方思考方法在最初似乎是惊异而又高度地令人不满。但是当我们认识到我们讲授给我们今天的工程师们和技术人员们的数学大部仍是‘如此做，做这个’的方式，而很少有严格的证明企图时，这种惊异就会消灭了。在许多中学中，代数学现仍被教成一堆公式而不是一种演绎的科学。”

③ 在这个问题上要作出有说服力的结论，还有待于对中国传统数学理论的深入发掘和对中外数学比较的细致研究。

④ 引自А·Д·АЛЕКСАНДРОВ等著《数学——它的内容、方法和意义——》第一卷，第一章，§1. 数学的特点。(中译本)

们相辅相成结为一体，为一切数学所固有并随着数学的前进而发展。可是谈到中西数学的基本分野，某些学者“最喜欢套用一个两极性的简单图谱，一种互为对照的模式。”他们把数学特征的几个方面完全割裂开来，甚至视为绝对对立的东西。在他们看来，正如希腊式数学不讲应用一样，中国式数学完全没有什么理论；抽象性、逻辑性仅为希腊的论证几何所具有，而与注重应用的中国算法体系绝缘。他们视数学的理论等同于逻辑，而把算法简单地看作“技术”，从而否定中国传统数学的理论意义。

计算与逻辑从来就是构成数学方法的两个缺一不可的方面。计算方法同样是以抽象性为特征的。首先数的概念就是一个了不起的抽象。“抽象性在简单的计算中就已经表现出来。”而且计算对象的抽象性远胜过几何图形，这应该是显然的事实。考察数学发生发展的历史，有一个值得注意的史实：在人类文明的初期，图形的研究似乎要比数的计算发生要早，进展得快。考古发掘表明，在法兰西和西班牙地穴里的大约 15000 年以前的绘画，已经表现了对图形的可惊异的智力[①]。而数的概念产生的最初年代虽然缺少可信的文物资料，但无疑它要较之为晚，并且进展缓慢[②]。这是因为，“形”虽然也是一种抽象，但是它的原型可以直接从自然界中摄取，例如直线来自拉紧的绳，平面得自宁静的湖水，圆产生于皎洁的满月。而数则不同，它是人们从千百万次对什物的比较中提炼和“构造”出来的。希腊人在计算方面的落后不能简单地归结为对应用的轻视。须知人类的社会生活总不能避免计算，正如人不能超脱社会一样。社会的实际需要强迫人们去改进计算；而计算的改进并非易事。这只须摘引 18 至 19 世纪法兰西著名数学

---

① D·J·斯特洛伊克．数学简史．中译本．第 1 页

② 人类学的调查研究表明，数的概念的发生发展是一个十分困难而缓慢的过程。至今还有许多原始民族在它们的语言中仅有一和二两个数的名称。

家拉普拉斯关于十进位值制记数法的评论就很清楚了。他写道："除了这几个符号的形式意义之外，再赋予位置的意义，用它们就能表出一切数的思想，是如此简单，以致于正是由于这种简单性使我们难于理解它是多么地美妙。但是这种思想对于希腊的伟大天才科学家阿基米德和阿波罗尼还是颇为模糊的。从这个例子，我们就会看到得来这种记数方法是何等不易！"[1]

在古代数学史上，算术与代数的发展"落后"于几何，这决不是由于人们的好恶所决定的。几何的直观性无疑是它早期成熟的一个重要因素。希腊人力避抽象的"数"而讨论几何的"量"；古希腊数学具有"代数几何化"的特点，即是对直观的依赖。这无疑是一切早期代数学的共同特征。中国古代传统数学中习用的图形分合移补而推导数量关系的方法，即后来所谓的"演段术"，也是代数借助于几何直观的表现。

如果说希腊数学的抽象性表现在对一般几何定理的推求，那末中国数学的抽象性则体现为计算对象的构造。中国古算中的筹算模式：列衰式、盈不足式、"方程"式、开方式、天元式等等，都是中算家从各种现实的数量关系中"构造"出来的。中算的"方程"相近于现代线性方程组的增广矩阵。它的演算程序相当于矩阵的初等变换。这些内容即使现今的初学者亦感到抽象难懂。因此中国传统数学在抽象性方面比起希腊数学毫不逊色，只是表现形式不同而已。

构造性是中国传统数学在方法论中的一大特色，也是中国传统数学创造性的突出表现。构造性之于希腊数学是罕见的。希腊人证明了无理数的存在，但无法构造出（表示出）它来，只好不予接受和承认，竟然造成希腊数学史上的"危机"。中算家则不然，

---

[1] И·Г·巴什玛柯娃，А·П·尤什凯维奇．记数制度溯源．苏俄教育科学院初等数学全书第一卷，算术，第一分册．中译本．北京：高等教育出版社．1959．2

在“方程”的演算中，以“正算赤，负算黑”，破天荒第一次“构造”出正、负数，使得“方程”的演算程序通行无阻；在开方不尽的情形，中算家用求微数法，用十进分数的无穷序列来逼近无理根[①]，本质上已是现代实数系构造性理论的雏形。因而，事实上中算家在数系理论方面，“创造与发展了从记数、分数、小数、正负数以及无限逼近任一实数的方法，实质上达到了整个实数系统的完成。”[②] 这是希腊数学所不可比拟的。

逻辑的严格性是数学最引人注意的特征。逻辑论证在数学中的重要性是明显的，因为它是使数学成为精确科学的重要手段之一。严密推理是古希腊几何学之所长。在古代希腊高度发达的文明中，论证几何与形式逻辑的成就都十分杰出，两者相得益彰，最终建成了欧几里得公理化体系的几何学，堪称古代科学之伟业。无可讳言，在逻辑严格性方面希腊数学比中国数学高出一筹。

历史上的任何科学体系都不是完美无缺的。东西方数学都各有所长，各有所短。如果说中国式数学以实用性、计算性和构造性胜过希腊式数学，那末，希腊式数学又以它的系统性、逻辑严格性优于中国式数学。

然而，“西方数学史家往往以希腊式的严格推理相标榜，并以中国数学从来没有达到演绎科学的形式相指责，” 所论十分偏颇。他们以中国数学的实用性来否定它的抽象性与理论性；以计算性来否认它的逻辑性与系统性。从而，根本上否定了中国传统数学的创造性与理论成就，排除了东方数学在世界数学发展史上应有的地位。

西方学者否定东方数学价值的唯一“实证”，就是“近代数学

① 求微数法早见于刘徽的“开方术注”。刘徽对不尽方根不可以分数表示而可用求微数法无限逼近的思想十分清晰，并给出实际计算步骤，其构造性是显然的。

② 顾今用. 中国古代数学对世界文化的伟大贡献. 数学学报，1975 (3)

产生于欧洲，而未发生在中国。”或者说，近代数学中国落后于西方。他们似乎竭力想证明，由于中国式数学体系自身的弱点，在中国产生近代数学是完全不可能的。

2. 中国近代数学为什么会落后？中国传统数学为什么未能发展成为近代数学？这是举世注意的重大问题。诚如许多学者所指出，中国自古以来是一个数学先进的国家，自秦汉以迄宋元，数学人才与数学创作世代不绝。到了十三四世纪，中国传统数学达到了鼎盛时期，取得了十分辉煌的成就，在数学的许多领域内处于世界遥遥领先的地位[①]。可是，在元代中期以后，传统数学逐渐衰落，到了清初几成绝学。而相比之下，欧洲在16世纪以后，“紧接着发生了一系列全新的事情——维叶特（1580年）和雷科德（1557年）终于精心制订了一套令人满意的代数符号，斯特文（1585年）充分估价了十进小数的功用，内皮尔在1614年发明了对数，岗特在1620年创造了计算尺，笛卡儿在1637年建立了坐标和解析几何，1642年出现了第一个加法计算机（巴斯噶），牛顿（1665年）和莱布尼茨（1684年）完成了微积分学。”[②] 欧洲数学突飞猛进，中国自然望尘莫及了。

中国近代数学落后的原因，是一个复杂的问题，通常归结为两个方面，即社会因素和数学传统自身的弱点。关于后者，其说主要有三：一是中国传统数学“缺少严格求证的思想”[③]，阻碍了数学的“抽象化、系统化”；二是“从未自发地发明任何公式的符

---

① 例如，李约瑟在《中国科学技术史》中，主要列举在算术、代数方面中国古代的成就，诸如记数法、圆周率计算、二项定理系数三角形、内插法、正负数与线性方程组，高次数字方程求根法等等，中国都显著地领先于欧洲。

② 李约瑟. 中国科学技术史（中译本），卷三. 北京：科学出版社，1978. 348～349

③ 三上义夫. 中国算学之特色。

号方法”，束缚了数学的发展[①]；三是偏重计算和依赖算具，限制了数学方法的流传与改进[②]。

诚然，与古希腊数学相比，中国传统数学中逻辑方法的应用不那么普遍，更没有形成《几何原本》那样明显的公理化体系。这是由于中国数学的算法体系和中国的形式逻辑发展得不大普遍、深入所决定的。说“中国传统数学缺乏严格求证的思想”是言过其实的。如前所述，中国古代数学中许多结论的证明是相当完整而严谨；但更多的情形则是“寓理于算”。应当看到，中国古代算经“寓理于算”，经文中只讲算法，而算理只能口授师传或者通过注释才能获得了解。这种形式自然不便于数学理论的流传和发展，研究成果易被埋没湮灭。中国数学史上数学创作得而复失，以后又被重新创造出来的事例屡见不鲜。中国古代数学出现时断时续、迂回曲折的复杂的发展情形是同中国传统数学理论的上述弱点分不开的。至于说由于逻辑因素影响了近代数学在中国产生，此说颇值得商榷。因为对于形式逻辑与公理化方法在近代数学发展中的作用，需要有一个恰如其分的估价。关于这一点，我们留待本节末尾来讨论。

中国的筹式符号系统，用“位”来区别不同的量，用上下左右各种相对位置关系来表示特定的位置关系，这就远不如欧洲后来发明的字母代数和运算符号应用方便而广泛。中国的符号体系带有原始的、不完备的性质。这自然也使中国传统数学方法与理论的发展受到一定程度的限制。不过这不是根本性的弱点。欧洲

---

① 卡约黎在《数学符号史》中写道：“中国古代数学在 14 世纪以后停滞不前的事实，主要是由于它不完善的、无适应性的符号”。

② 李约瑟《中国科学技术史》：“筹算盘与珠算盘的普遍应用作为一个阻碍因素究竟起了多大的作用，这是一个值得讨论的问题。这些算具当然使得所有的计算不留痕迹，没有留下用以求得答案的中间计算的记录。但是，似乎很难令人相信，如果更多的数学方法得到发展，这种计算工具实际上就不会那么有用了。”

的符号代数是适应笔算的特点而发展起来的。中国宋元以来，随着造纸与印刷术的发达，算经中“演草”出现增多，这可以看作筹算向笔算的靠近。这种趋势若能发展，中国数学实现符号体系的改进也不是没有可能的。李约瑟早已作这样的推测：“要是对数学的要求确实足够大的话，那末，在中国肯定是不乏那种能冲破旧的数学记号的束缚并作出（实际上只在欧洲作出）新发现的人的。”①

使用算具，重视计算，不能算一种数学体系的弱点。正如今天电子计算机的应用改变数学和整个科学技术的面貌一样，古代中国由于算具的先进，计算发达，它的数学才能长期处于世界前列。计算机发展史的历史分期，通常将从古代到 17 世纪初划为“算盘阶段”，17 世纪以后才开始了“机械式机器阶段”，而电子数字计算技术的诞生则是在 20 世纪 30 年以后②。中国的筹算与珠算不仅在 17 世纪以前是先进的③，而且即使在电子计算机高度发展的今天，珠算仍未失去广泛应用的价值。事实上，欧洲人由于与阿拉伯人的文化交流，大约从 10 世纪以后在欧洲算盘盛行。中世纪欧洲的许多有名的数学著作都名曰《算盘从书》、《算盘全书》之类；“‘算盘’这个词曾被用作数学的同义词。”④ 所不同者，在欧洲以后出现了反对使用算盘的斗争。“十进制的兴起和推广决定了算盘统治数学时代的结束。利用新的数制，在纸上进行数学计算比用算盘方便。随着十进制的推广，算盘就从一种万能工具逐渐变成辅助计算工具。这个过程经历了尖锐的斗争，当时认为有两门数学：一门是算盘数学，另一门是没有算盘的纸上数学。这

① 李约瑟．中国科学技术史（中译本），卷三．北京：科学出版社，1978．382

② И．А．阿波京等．计算机发展史．上海：上海科学技术出版社，1984

③ И．А．阿波京等．计算机发展史．上海：上海科学技术出版社，1984

④ И．А．阿波京等．计算机发展史．上海：上海科学技术出版社，1984．45

个斗争在欧洲就成为数学史上有名的算盘提倡者和算法提倡者之争。"[1] 中国的筹算本身就是一个算法体系，它集计算技术与数学原理于一身，因而在中国没有出现过"算盘与算法"之争。当然，由于中国筹算的优越性，在客观上抑制了笔算的发展，不便于数学的符号化和理论的深入，这可以说是过分依赖算器的副作用。

综上所述，中国传统数学体系自身的一些弱点使它的方法与理论的发展受到一定程度的限制。但是，这无论如何不是决定性的。中国近代数学落后的根本原因在于社会因素。

然而，谈到社会因素时，西方学者往往归咎于中国数学的实用性，认为中国人重视实践和经验的性格，阻碍他们去考虑抽象的概念。诚然，数学是一门抽象性、思辩性极强的学科。不可否认，数学理论体系的内部矛盾对于数学发展的推动作用。尤其是当它形成一门独立的学科，数学家们自觉地运用逻辑的武器和构造的能力来修盖他们的理论建筑物的时候，理论自身的能动性就表现得非常之明显，以致使得它的某些抽象的概念和内容似乎超越了社会的时代而产生。这在近代世界数学发展史上是不乏例证的。中国传统数学对于社会极强的依赖性，这使它往往囿于经验，满足于实用，因而致使它的理论的丰富蕴藏未能得以充分发掘，甚至许多重要的理论成果都失之交臂。例如，中算家很早就发明了勾股定理和开方术，并且从实际运算中认识到不尽方根是不能用分数精确表示，而只能"以面命之"。他们已经意识到存在着不能用分数精确表示的数，但满足于求微数之法能以分数无限逼近不尽根，于是"苟合时用"而未能去建立一套无理数的理论。这种情形应当说是中算理论局限性的表现。

然而，这只是问题的一方面。客观的实践需要，特别是生产

---

① Ⅱ. A. 阿波京等. 计算机发展史. 上海：上海科学技术出版社，1984. 52～53

需要，在数量关系上和空间形式上所提供的大量新鲜材料是促使数学向纵深发展的强大动力。在这里回顾一下东西方数学发展的历史是很有教益的。如前所述，中国数学的发达有二三千年之历史，而“在希腊则自纪元前6世纪至纪元后4世纪，不过有一千年之期。”似乎可以这样说：在古代，注重应用的“东方数学”在发展的持续性方面超过了“西方数学”。的确，古希腊几何学在它盛极一时之后，大约一千年的时期中几乎处于完全停滞的景况；而中国古代数学经汉代形成体系之后，相当长的历史时期内相对地保持着平稳缓进的状态。出现这种差异的因素可能是多方面的，主要根源在于社会实践对于数学发展的推动作用。社会的需要无疑是数学发展最基本、最重要的动力，尤其是在数学的理论与方法还比较幼稚的古代。中国传统数学由于扎根于实践，尽管受到封建文化专制制度、唯心主义哲学思想和数学神秘主义等等的压制与束缚，但是社会实际需要的动力终究会使它冲破各种藩篱而不断前进。

阻碍中国近代数学发展的社会因素是多方面的。诸如八股取士制的危害，程朱理学的束缚，盲目排外与封建文化专制的窒息，以及对知识分子的歧视和对科学技术的鄙薄，无疑都会影响到包括数学在内的近代科学技术在中国的发展。总之，我们认为中国长期停滞于封建社会，缺乏像欧洲16世纪以后对科学技术那样的社会推动力，才是近代中国数学落后的根本原因①。

3. 为什么近代数学产生于伽里略时代的欧洲？这是否意味着希腊式数学独自的功绩，或者说希腊式数学优于中国式数学？这是值得深入探讨的问题。

正如西方的“文艺复兴”是近代欧洲各民族文明的兴起，而不是古希腊、罗马文明的恢复一样，欧洲的近代数学绝不是希腊

① 这个问题已超出了中西数学传统比较的范围，在此不多涉及。

数学的延续，它是东、西方数学的融合，与欧洲数学家的再创造的结果。关于东、西方数学在欧洲的合流，钱宝琮曾扼要地描述过这一过程。他写道："第5世纪以后，大部分印度数学是中国式的，第9世纪以后，大部分阿拉伯数学是希腊式的，到第10世纪中这两派数学合流，通过非洲北部与西班牙的回教徒，传到欧洲各地，于是欧洲人一方面恢复已经失去的希腊数学，一方面吸收有生力量的中国数学，近代数学才得开始辩证的发展。"①

一般科技史家认为，近代科学的主要特征之一是"对自然现象采取定量描述的观点"，或者说"各种科学假说的数学化"。这标志着数学在科学中的基础作用的确立和近代数学的兴起。争论的焦点在于，近代科学"数学化"的特征是否得自希腊数学的传统？某些阐述西方科技文明的著述，把近代西方科学归之于古希腊"数学思想超实用的传统的发展"。认为"欧几里得的几何学，是代表自然世界量化的一个数理模型的趋向，""给予西方科技文明追求知识的精密性，带来不知多么巨大的贡献与影响"②。

以欧几里得《几何原本》为代表的逻辑演绎几何在后来公理法、非欧几何学以及其它数学发展中所起的历史作用是应予肯定的。但是，说近代数学的产生取决于希腊几何，是既不符合历史事实，又缺乏理论根据的。如所周知，16世纪以后在欧洲发展起来的代数学、解析几何与微积分，它主要表现为演算的符号化、几何的代数化、变量间的相依关系（即函数概念）的广泛讨论以及构造性方法普遍运用等，这些都与希腊几何学传统相去甚远。例如，布尔巴基曾指出，欧几里得的那种系统阻碍了代数学的发展

---

① 钱宝琮．中国古代数学的伟大成就．科学通报，1951，2（10）：1041～1043

② 郭正昭．浅谈数理模型与逻辑体系——中西科技文明基本分野探讨之一．第三届中国科技史国际讨论会论文．1984．

并使之瘫痪[1]。怀特黑也否定了希腊人发现了近代数学的基础。他写道："如果认为希腊人发现了数学的基础，而我们给它增加了高深的部分，这是错误的。更接近实际情况的是相反的说法：希腊人对数学的高深部分感兴趣，但从未发现它的基础。……魏尔斯特拉斯的极限理论和康托的点集理论，是远比我们近代的算术、近代的函数关系图示法或近代的代数变换概念，更加接近于希腊人的思想模式的。初等数学是近代思想最具有代表性的创造之一——它的特点是通过直接的途径把理论与实践联系起来了"[2]。至于在微积分的发明上希腊式数学的意义，卡尔·B·波耶在其《微积分学概念史》上这样评说："从微积分的发展观点来看，欧几里得的《几何原本》表现出一种枯燥无味的讲究严格的顽固性，阻碍了那些新的思想和发现的生长。欧几里得的著作代表了一切数学思想的最终综合形式——对一组前提的逻辑关系作演绎推理的结晶。不过，继他的几何学之后的几世纪中，分析研究往往是建立在经验观察或并不很审慎的直观的基础上，并时常还是在先验的思辩的基础上进行的。微积分的概念主要地是从这类探研而不是欧几里得的严密思想中进一步发展起来的。"[3] 相反地，就李约瑟所列举的欧洲 16 世纪以后数学上发生的一系列全新的事情（代数符号、十进小数、对数、计算尺、解析几何、计算机、微积分的发明），它们更多地包含着东方式数学的基因。因此，说 16 世纪以后在欧洲发展起来的近代数学，是东西方数学长期融合并主要在东方式数学的影响下产生的，不是没有道理的。

学习和研究中国数学史，应当以历史唯物主义的观点全面认识中国传统数学的特点。尽管中外数学的发展早已冲破地域和民

---

① Bourbaki N., Eléments d'hisloires des mathématiques, 1969.

② 李约瑟. 中国科学技术史，卷三. 北京：科学出版社，1978. 336～337

③ C. B. 波耶. 微积分学概念史. 上海：上海人民出版社，1977. 52

族的狭隘界限，汇合到世界数学发展的潮流之中，但是对比分析中外数学的特色，特别是比较东、西方两种迥然不同风格的数学体系，对于认识数学发展规律和探索数学现代化的途径是很有价值的。数学的发展从来就是计算和逻辑两种方法结合使用的。现代数学中“几何代数化”与“代数几何化”的交互使用，逻辑演算与机器证明的发展，都表明这两者结合的深化。历史上的东、西方数学各有长短。由于中国近代数学的落后而全盘否定中国传统数学的理论体系，就必然陷入逻辑的矛盾之中，这就无法解释中国古代数学何以能长期居于世界数学的领先地位。古今中外一些“言必称希腊”者，不仅否定了中国传统数学的理论体系，而且抹煞了中国古代数学的辉煌成就，这是完全不符合历史事实的。联系实际，注重计算，是我国古代数学的优良传统，我们应当发扬；但也应当看到，中国传统数学理论在系统性、一般性与严谨性方面存在不足之处，应当认真总结这方面的历史教训。“取其精华，去其糟粕”，这是我们对待民族文化遗产的正确态度。

第 二 编

中国数学的萌芽

本编主要探讨、阐述中国数学的萌芽问题，上起石器时代的原始社会，下迄春秋战国，把大量的零散数学资料，大体按历史顺序予以编排和讨论，并根据具体情况分为五章。

第一章　数学在中国的萌芽

数学是什么时候在中国萌芽的？这显然是一个无法回答的问题。就目前所掌握的资料来看，旧石器时代的古人没有给我们留下可靠的数学资料，但是新石器时代的数学资料是比较丰富的。本章将从考古学、历史传说和民族学三方面探讨数学在中国的萌芽问题。

第一节　对形状的认识

中国最古的猿人要数云南的元谋人，到现在有一百七十多万年了。在陕西的蓝田、北京的周口店、内蒙古的大窑村等地都发现了几十万年前古代猿人遗骨或其他文物。直到一万多年前旧石器时代结束以前，古人在数学方面达到何种程度，虽然还是一个谜，但是在晚期已经多少对数学有接触，最明显的是反映在石器

的形状上和刻画上。

旧石器时代的石器经打制而成，其形状主要是根据使用和功能决定的，如刺杀用的石器要一端有尖的锥状；砍削用的石器要打制成薄片，且一侧有刃的片状；为了便于投掷，把石头打制成较小的球状；……那时候，人们是通过打制石器或对某些自然物（如植物的直干、果实和大的叶子等）的观察逐渐在头脑中形成一些形状观念：锥形、柱形、平面、球形等。在开始时不是先有形状观念用来指导打制石器，不过经过长期实践活动之后，情况就翻过来了：使用已形成的形状观念打制各种石器，越是往后形状观念越明确。石球是最典型的几何形状，在对形状的认识方面具有代表性。

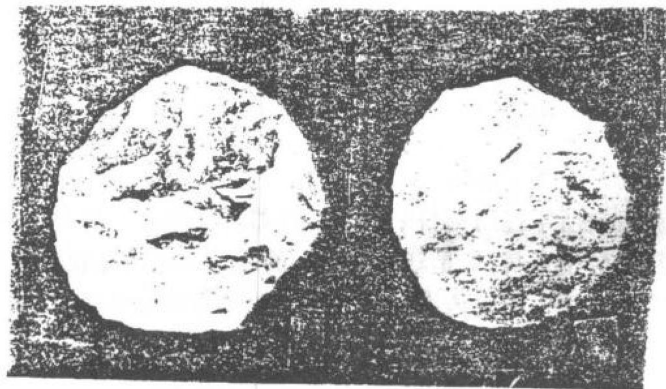


图2·1·1

几十万年以前的蓝田猿人就制作出不太规则的石球[①]，这是目前在中国发现的最早的石球。几万年前山西丁村人遗留下大量

① 魏京武，尹申平．陕西的旧石器时代考古．考古与文物，1988（5，6）：24～40

的石球，前后至少出土了两三批。早先出土的一批，最小的200克左右，最大的超过1500克；最近出土的一批，大多数在500～1 000克之间，而最大的大到1 960克①。这些石球可能是用于打猎的武器，形状比较规则（图2・1・1）。在甘肃环县也出土了旧石器时代的6个石球，他处也有发现。原始人通过制作石球的实践，肯定对于球形形成比较抽象的认识，有了球的观念。

到了新石器时代，石球更多，例如在甘肃东乡出土的5 000多年前石球，有五六个，也是大小不一，其中有一黑一白，制作的非常圆，比起旧石器时代对球的认识有所提高。由于陶器的发明，便出现了陶球，特别值得注意的是在长江流域发现了许多空心陶球。从四川经湖北，到安徽，这种空心陶球都有出土。在考古学上属于大溪文化类型，大溪位于四川巫山长江南岸，首先在这里发现此种类型文化。50年代在这里发现了红色空心陶球（图2・1・2）②。1974到1975年，又在湖北松滋县桂花树新石器时代遗

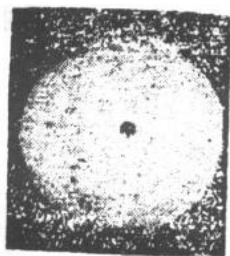


图 2・1・2

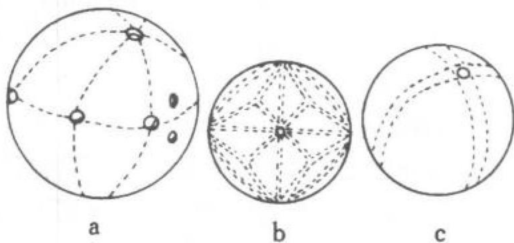


图 2・1・3

① 临汾行署文化局，丁村文化工作站．丁村旧石器时代文化遗址80：01地点发掘报告．史前研究，1984（2）：57～68

② 四川长江流域文物保护委员会文物考古队．四川巫山大溪新石器时代遗址发掘纪略．文物，1961（11）：15～21

址出土了一批空心陶球，依纹饰分有三种形式，都有镂孔，而且镂孔之间有双股线或单股线联接。(图2·1·3a,b,c)其中b型最为标准，有双股锥刺纹组成米字格，有8个两两相对的小镂孔，a、c两种类型不太规则[①]。1975年春，又在湖北江陵毛家山出土了陶球和陶弹丸，陶球都是空心的，其中有一种是用三股一组的篦纹彼此相交，构成六个对称的米字，交点上都有圆形镂孔。[②]在安徽省博物馆收藏着几十个空心陶球。大溪的空心陶球在四川省博物馆也可以看到实物。球壁的厚薄一般都比较均匀。不论出于何种目的而制作这种陶器，都表明当时人们对球的认识已经达到较高的水平。

原始社会的人不仅对球有了认识，而且对其他几何形状也逐渐有所了解，在陶器或其他器物上都有明显的表现。在立体方面可以举出圆柱状和圆台状。早在旧石器时代，人们就制造过不规则的柱状和锥状石器。由于石料本身的原因，制造柱状石器比制造锥状石器难得多，因此柱状石器的出现比锥状石器晚，“山顶洞人”的骨针，磨得很圆，中间部分是较规则的圆柱。在七千多年前的浙江河姆渡新石器时代遗址中出土了4个木筒，壁厚约1厘米，厚度均匀，很像一节竹筒，上下基本平直，弧度一致，其中有一件两头缠着藤蔑类的圆箍多道，是很规则的圆柱(图2·1·4)。在河姆渡遗址中还发现了珠、丸等小的球状的遗物[③]。

在新石器时代，陶纺轮大都是与圆有关的立体形状，如圆柱、圆台、圆饼等，而圆台形又有好几种。由于纺线的需要在圆形轮的中间要插一带钩的细棍，所以纺轮中央都有一个通孔。出土的

---

① 湖北省荆州地区博物馆．湖北松滋县桂花树新石器时代遗址．考古，1976(3)：187～196

② 纪南城文物考古发掘队．江陵毛家山发掘记．考古，1977(3)：158～165

③ 浙江省文管会，浙江省博物馆．河姆渡发现原始社会重要遗址．文物，1976(8)：6～14

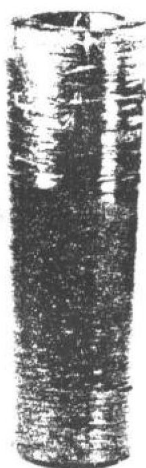


图 2·1·4

纺轮多得很，几乎在所有的较大博物馆中都有，下面举几个例子以示新石器时代的人对一些立体形状的利用和认识。

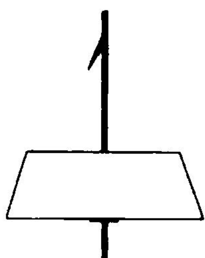
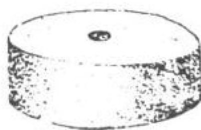
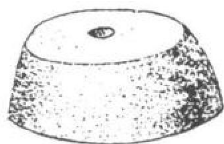


图 2·1·5　纺轮

在西安东郊半坡新石器时代遗址出土了 50 个陶纺轮，还有两个用石头磨成的。它们绝大多数都是两面是平面，也有个别的只有底面是平的，实际上是一种底面大而高度低的小圆锥，只是因为中间穿孔而没有了锥顶。其中较多的是圆柱状和圆台状两种[①]，（如图 2·1·6 a，b），一般比较规则。这有 6 000 多年的历史。又如，比半坡稍晚的常州圩墩 5 000 多年前新石器遗址出土了 9 件陶纺轮，其中也有圆柱状



(a) 半坡出土的圆柱形陶纺轮



(b) 半坡出土的圆台形陶纺轮

图 2·1·6

和圆台状的[②]，更具有几何形状。那些不呈几何形状的陶纺轮，我

① 中国科学院考古研究所，陕西省半坡博物馆. 西安半坡. 北京：文物出版社，1963，81

② 常州市博物馆. 常州圩墩新石器时代遗址第三次发掘简报. 史前研究，1984 (2)：69～81

们不进行介绍。

除纺轮外，在其他陶器上也反映着丰富的几何观念，例如一些器形本身或其上刻画的花牙等大都表现着某种几何内容，可以举河北磁县下潘汪出土的新石器时代的陶器①。下潘汪出土的一些陶器不仅外形规则，而且口沿是正圆形，这是其他地方出土的圆形陶器也具备的。重要的是底周外缘的花牙子，牙距比较均匀，明显地反映出等分圆周的思想（图 2·1·7）。

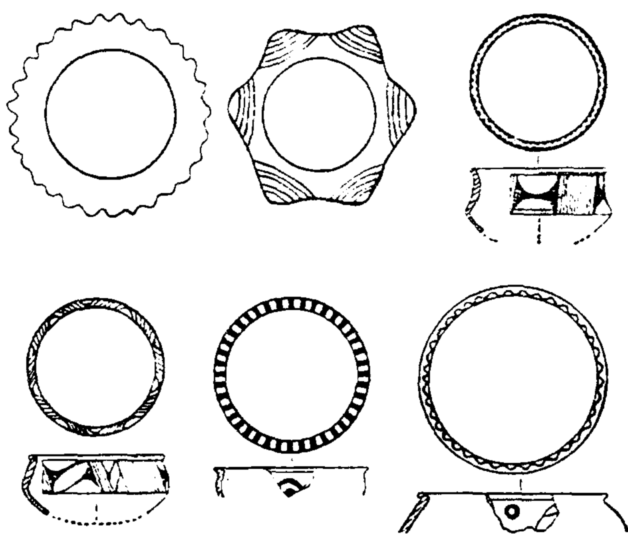


图 2·1·7

陶器上的花纹中包含着更多的几何内容，如平行线、直角、直角三角形、等腰三角形、菱形、圆、梭形、弧、折线和长方形等等。在河姆渡出土的陶器上有明显的平行线和不太规则的正方形。

① 河北省文物管理处．磁县下潘汪遗址发掘报告．考古学报．1975（1）：73～116

在西安半坡出土的彩陶上所画的几何图案中就有平行线、折线、三角形、长方形、圆、菱形等等[1]（图2·1·8）。

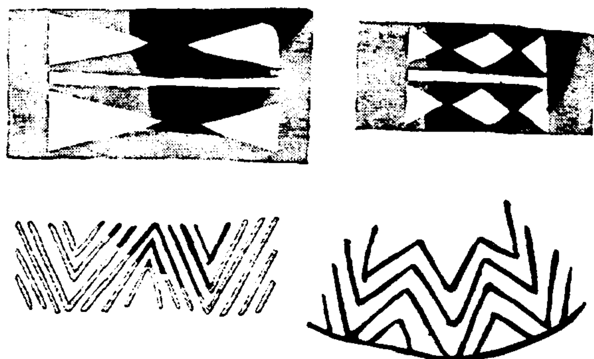
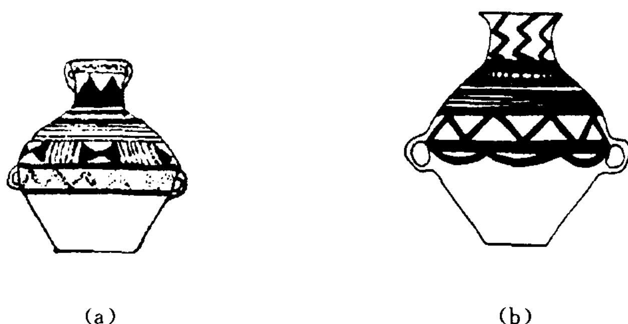


图 2·1·8

在其他新石器时代出土的彩陶上的花纹中也有上述的各种几何图案，例如甘肃景泰县张家台出土的彩陶有三角形、平行线等



(a)　　(b)

图 2·1·9

[1] 中国科学院考古研究所，陕西省西安半坡博物馆．西安半坡．北京：文物出版社，1963．174～175

图案[①]（图2·1·9(a)）。在青海民和县揩子坪采集的彩陶上则有折线、等腰三角形和不太规则的弧形[②]（图2·1·1·9(b)）。内蒙古敖汉旗小河沿出土的彩陶器座上有更丰富的图案[③]（图2·1·10）。

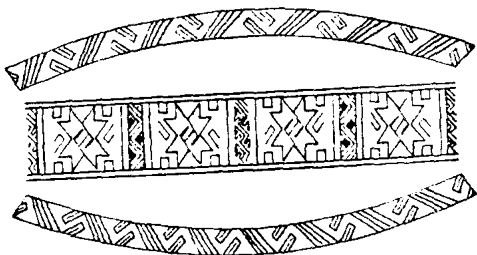


图 2·1·10

原始社会的人对平面图形的认识大约晚于立体形状，把立体进行投影（不是有意识的）到某一表面（如圆形陶器的表面）上首先得到的是某种物体（如动物等）原形的轮廓图，其次是逐渐抽象而成为非常简单的直线形和圆形几何图案。这在认识上和技能上都是一次飞跃。这种演变过程，在仰韶文化中有较为明显的表现。有人研究陕西临潼姜寨史前的图腾问题，在一些彩陶钵上画着稍经抽象的鱼形(有侧面的和对鱼头的)、蟾蜍形等[④](图2·1·11)。和姜寨同时代的半坡则有了进一步反映，有人作过这种合乎实际的推测[⑤]。即由鱼形变成不规则的梭形或菱形、三角形、平行线等，再变成比较规则的几何形(图2·1·12)。此种推测在陶器上可以较清楚的看到：如有上下两条鱼形，头朝一个方向；还有两条鱼头相向的鱼

① 甘肃省博物馆. 甘肃景泰张家台新石器时代的墓葬. 考古，1976 (3)：180～186

② 青海省文物考古队. 民和县转导公社文化遗址调查. 史前研究，1985 (3)：60～66

③ 辽宁省博物馆等. 辽宁敖汉旗小河沿三种原始文化的发现. 文物. 1977 (12)：1～22

④ 高强. 姜寨史前居民图腾初探. 史前研究，1984 (1)：63～67

⑤ 《西安半坡》，181～185

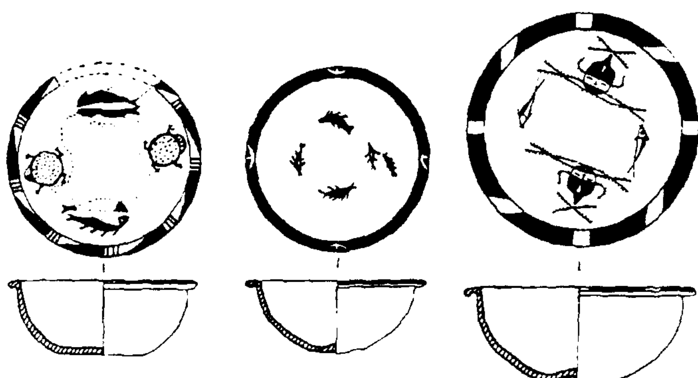
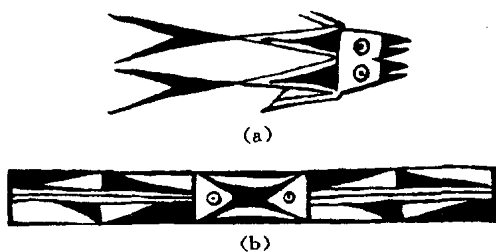


图 2·1·11



(a)

(b)

图 2·1·12

形。正是这些图形演变成规则的几何图形。

根据上述情况来看，我国在新石器时代已有了某些几何知识，初等的直线形和圆形基本上是熟知的。但还远未达到理论认识的程度。

第二节 最早的数目观念

数目观念是在人们长期实践的基础上逐渐形成的，应晚于对某些立体形状的认识。最初形成的无疑应是基数而不是序数。

原始社会的人对数目的认识，开始从“一”和“多”起，后来才逐渐有了“二”、“三”等观念，只是作为一些物体的个数而反映在人的头脑中。因此，最初的数目都和具体对象联系在一起，如一只羊、两根木棒等，没有离开对象的抽象的数概念。在通常情况下，人们可以通过手指等简单地对应关系“数”（shǔ）出物体的个数。

数目观念的发展经过一个漫长的过程，由一、二等进入十几、几十个数目可能要上万年，甚至几万年。旧石器时代除骨器上能刻划外（下面介绍），在石器上不易留下较细小的刻痕。但是陶器则很便于反映数目，因此在新石器时代以后，在许多方面反映出人们对数目的认识。从出土文物来看，可以得到证明。如河姆渡出土的大量骨耜有两个穿绳的孔，半坡出土的尖底陶器有两个耳，由此判断，当时人们一定知道“二”。在许多地方出土的陶器是三个足，不仅是知道这样作具有稳定性，而且应知道“三”这个数目。在河姆渡出土的陶器上，发现其上刻有四叶纹（图2·1·13）。虽属孤例，结合当时河姆渡人的整体水平来看，完全能认识“四”，而且所知的数目比这要大得多。在半坡出土的一些陶器上，有排列整齐的点子，由一个到八个[①]，可以说是“八”的反映。

计（或记）数的方法有许多种，见于记载的有两种。一是结绳，一是刻划。《易·系辞》上说：“上古结绳而治，后世圣人易

---

① 西安半坡. 图版壹肆玖（CXLIX）。

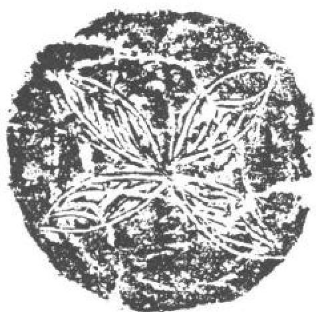


图 2·1·13
河姆渡陶器上的四叶纹

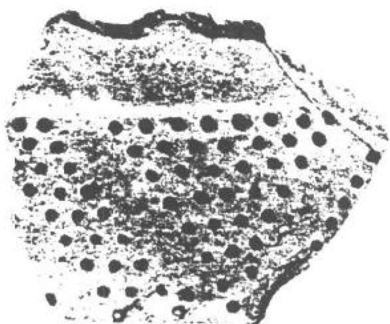


图 2·1·14
半坡陶器上的点子

之以书契”。至于这两种方法起源于何时，可以说无法回答。有些古籍上说轩辕（黄帝）到伏羲、神农等很长一段历史时期都是“民结绳而用之”①，或说伏羲“结绳而治”②。三国时虞翻在所著《易九家义》中引东汉郑玄的话说：“事大，大结其绳；事小，小结其绳。结之多少，随物众寡”，把结绳的用法和表示数目的意思说的比较清楚。这些记载，虽然很晚，但是在原始社会结绳无疑是普遍使用的记数方法，而且延续了很长时间，甚至直到很晚以后还有些民族在使用。可是结绳用的材料麻、毛、草等都不易长期保存，所以现在想找到四、五千年以前原始社会的结绳实物无法办到。

刻划与结绳完全不同，刻划所用的材料骨、石、陶器等都能长期保存，几万年都无问题。目前所见早期的刻划记数实物主要是骨质的。根据考古发现，说明中国对数目的认识相当早。1963年在山西朔县峙峪村北出土了约二万八千年前的许多兽骨，其中

① 庄子．卷十“胠箧”。

② 虞世南．北堂书钞．卷十二引《典论》。

不少的骨片上留有数目不等的刻划，五以内的斜纹较多地出现，表明当时已知简单数目并能运用。从一个刻划“普氏小羚羊”的图像看，角是两个，而不是一个或三个。经显微观察发现：“普氏小羚羊”图像腹下另加四道浅划，表示羚羊的腿是四个而不是一个[1]。这也许是早期运用数目的实例之一吧？

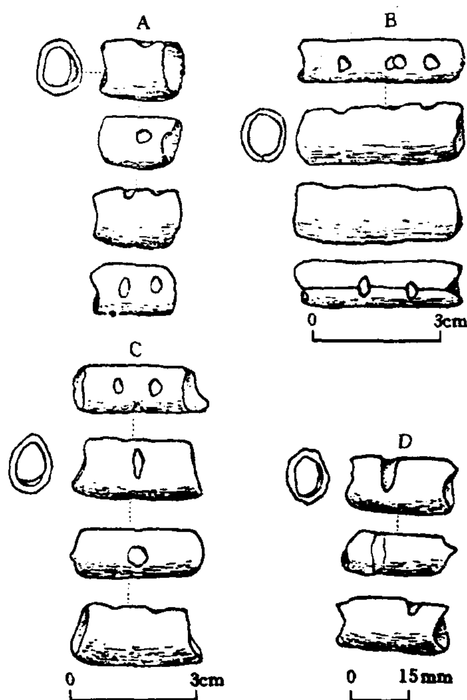


图 2·1·15 “山顶洞人”的刻符骨管

在北京房山县周口店有一万多年前的旧石器时代遗址，考古

① 尤玉柱. 峙峪遗址刻划符号初探. 科学通报，1982 (16) ：1008～1010

学把那遗址定名为山顶洞。“山顶洞人”对数目的认识也有较高水平。在那遗址中出土了四个骨管[①]，可能是刻划记数的实物标本。

这四个骨管上都有横向磨制的符号，形状多是圆点，有两个长圆形（图2·1·15）。其中有一个长圆形围着骨管半圈，展开成平面，就是个长条。骨管A相对的两个侧面分别有一个圆点和两个圆点，共三个圆点；骨管B相对的两个侧面，一面有三个圆点，一面有两个圆点，共五个圆点；骨管C相对的两个侧面，一面有两个圆点，一面有一个，在另外一个侧面有一个长圆点，共四个点；骨管D只有一个长条形符号。从这些符号的排列方式，可以初步推测出“山顶洞人”对于数目的某些观念。很显然，“山顶洞人”的最基本的数目是：用一个圆点表示一，两个圆点并列表示二，三个圆点并列表示三。值得注意的是把五个圆点排成两排，我们认为各是各的数目，合起来是五个，是表示二加三等于五。一个加两个等于三个。长圆形可能表示“十”。如果把这些骨管都展开成平面，其上的符号排列就像图2·1·16那样，它们应分别代表“三”、“五”、“十”和“十三”，是一种十进制思想[②]。

根据上述情况来看，旧石器时代末期，刻划记数反映已经有了较高的数学水平。

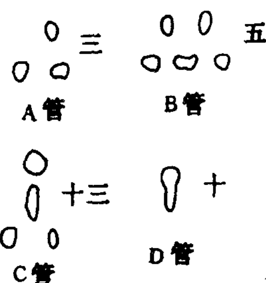


图 2·1·16 “山顶洞人”刻符骨管的展开

到了新石器时代，数学水平又有了提高，表现在记数方面也不断有新的方法出现。青海乐都柳湾的刻痕记数就是其中之一。

---

① 裴文中．周口店山顶洞文化（英文）．1939．Peking：30

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．5～6

1974年至1978年，在青海乐都县柳湾发掘了1500座新石器时代末期墓葬，共出土3万余件各种文化遗物，这些文化遗物属于马厂、半山、齐家和辛店四种文化类型。在前两种文化中出土了许多带刻口的小骨片：半山类型的一批1000多枚，其中带刻口的一类为长方形，大小差不多，长约2～2.4厘米，宽约0.5～1厘米，厚约0.1厘米。在长边上有的一边有刻口，有的两边有刻口，刻口少者1个，多者8个，有两件的正面还刻有“×”形纹。器形整齐规则，磨制精致①(图7・1・17)。

马厂类型的长方形带刻口的骨片共48枚，均长2.3厘米，分三型：在一长边上有一个刻口；在一长边上有一个刻口，另一长边上有两个刻口；在两长边上分别各有两个和三个刻口②。

这些骨片的用途是什么呢？有人早已提看法，认为马厂类

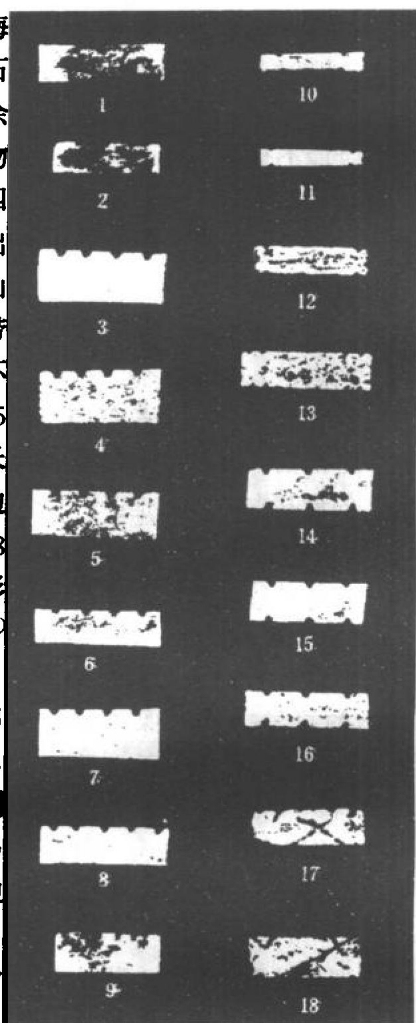


图 2・1・17 柳湾半山类型刻口骨片

① 青海省文物管理处考古队，中国社会科学院考古研究所. 青海柳湾. 北京：文物出版社，1984. 50～51

② 青海柳湾・北京：文物出版社，1984. 169.

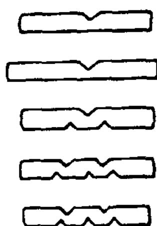


图 2·1·18
柳湾马厂类型
刻口骨片

型的“这些骨片大约是用作记事、记数或通讯联络用的。”[1]（图 2·1·18）对半山类型的没有论及。这种认识是有道理的，但还应作进一步解释。每一个刻口都表示“一”，五个刻口累加起来就是“五”，…。用累加的方法可以表示较大的数，例如 1+3+5=9，…。马厂类型的最大数到五。半山类型的最大数到八，每个骨片所能表示的数均不超十，与十进制符合。有理由认为，那时已有了加法运算和十进制，如果和旧石器时代末期的数学水平相比较，这个认识是理所当然的。结合下面要讲的数目字问题就更清楚了。

对于柳湾出土的刻口骨片，还可以有另一种理解，就是作为交换用的原始货币，刻口是“面值”。墓主人保存的具有“面值”的骨片相当于一笔财富，很可能是用某些物品交换回来的。这样理解，同样有记数（或计数）的意义，就像现代人对货币所理解的钱数那样。至于带“×”形刻划的骨片，也许是表示“大面值”？尚需进一步研究。

原始社会的人对数目的认识还表现在符号记数方面。符号记数和刻划记数是两回事，后者比前者原始，但毫无疑问，前者是从后者演变来的。就是说把某些刻划固定下来，有的稍加改造就变成数字符号了。这个演变过程是从什么时代开始，持续了多长时间，现在还不能肯定地回答。从目前已掌握的情况来看，大约开始于旧石器时代末和新石器时代初（即约 1 万年前后），新石器时代前期就应当有固定的数字符号，到新石器时代中期已经演变完了，再往后就是数字符号本身的变化，与原来的刻划完全分离。

① 青海省文物管理处考古队，中国科学院考古研究所青海队．青海乐都湾原始社会墓地反映出的主要问题．考古，1976（6）：365～377

从西安半坡、姜寨到青海柳湾、山东城子崖等新石器时代中晚期遗址中都出土了数学符号，最后基本上和后来甲骨文中的数目字衔接，大体上能看出字形演变的脉络。

在半坡出土的陶器上有许多刻划符号，其中被辨认出来的数字符号有“×”（五）、“∧”（六）、“+”（七）、“)(”（八）、“|”（十）和“‖”（二十）等六个①。在姜寨出土的陶器上，也有数字符号，比半坡多“—”（一）和“|||”（三十），而少“)(”（八）。②虽然这些数字符号还不连续（如九尚未被辨认出来），但是我们可以根据推理补上一些，如下：

—	＝	≡	≣③	×	∧	+	)(	□④
一	二	三	四	五	六	七	八	九
|	‖	|||	[||||]	□	……			
十	二十	三十	四十	五十	……			

这套数字是一种明确的十进制系统。由于这些符号不连接在一起，所以是否有非十的倍数的两位数就无法断定。以理推之，当时人们肯定知道如十一、二十四等数目，很可能是分记两次，即如“|　—”、“‖　≡”等。后来演变成合书。

柳湾出土的彩陶上有彩绘符号，其中有的应是数目字（图1·1·19）。从个数来看，比半坡、姜寨的要多些，有些字形也有变化，有的数目字有好几种写法。由一到九已完全，大于九的数字明显增加，很可能有了十位数与个位数的合书⑤。但有些符号的意义还不很明确，在下面的表中把这些符号的数字加上问号“?”。

①② 王志俊．关中地区仰韶文化刻划符综述．考古与文物，1980：14～21，其中“∧”为笔者所提出。

③ ≣表示方框中的≡是填补的，下同。

④ □表示空缺，下同。

⑤ 青海柳湾．北京：文物出版社，1984．162，164

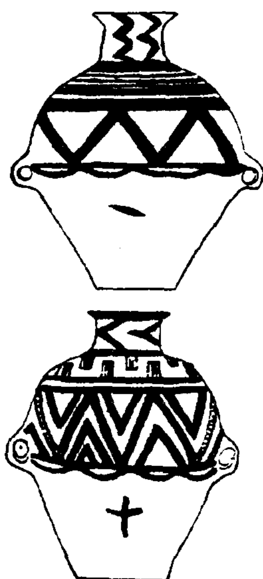


图 2·1·19　柳湾彩陶上的符号

一　＝　≡　≣　☰（×、⌧?）∧　＋（×?）
一　二　三　四　五　　　六　七
)|　九（?）　|　‖（卄? 廿? ∪?）□　山
八　九　　　十　二十　　　三十　四十（合书）
□　　山山（?）　　⋲（?）　　　山（?）
五十　六十（合书）　十三（合书）　三十一（合书）

在上面打了问号的那些符号，对于它们是否数目字有一定怀疑，不过当时肯定有了这类数目字，因此不应否定这些符号为数目字。

和柳湾同时代的山东城子崖、上海马桥等新石器时代末期的遗址所出土的陶器上都有数字符号。马桥的陶器符号中有“⌧”、

“+”和“|”[1] 分别是五、七和十，五的这种写法是首次出现马桥陶器上的数字符号，较为重要，在城子崖出土的虽然只有相当于七、十、十二、二十和三十等五个数目的符号[2]，但是在写法上更为明确。(图 2・1・20)

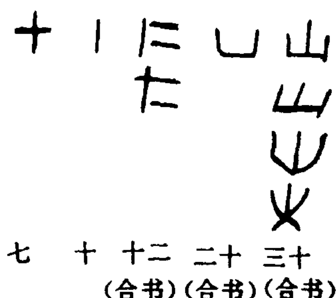


图 2・1・20　城子崖陶器上的数目字

通过上述事实，可以大体上看出一些数目字的演变过程。演变的原因大致有二：其一是为了简化；其二是注意避免混淆。最初的数目用刻划方法表示，要刻好多划，如六就要刻六划，九要刻九划，……。太麻烦，人们必须要想到改变，因而从五起就不用一道一道去刻五道六道，而是改用两划、把排列方向改变，这就出来×、∧、+、)(、九，简单多了。合书也是一种简化。“=”与“‖”，“—”与“|”、“≡”与“|||”，“×”与“+”等中的一个独立的符号在一陶片上，而这陶片又无法判断上下（即器口和器底），便不能分清其是哪一个数字，所以就在“×”的上下加横而变为“㐅”，“‖”、“|||”、“||||”在底下加横而变为“⊔”、“⊔”、“⊔”，写快了就成为“∪”、“Ѱ”、“⊍”。这样一来，就不会发生混淆了，不过“—”与“|”仍然没有办法严格区别，而等到西周才解决的。

数目字的出现和演变时期，和一些与数学有关的历史传说基本符合。流传最广的是“隶首造数”说，据记载：“黄帝时隶首作

① 上海市文管会．上海马桥遗址第一、二次发掘．考古学报，1978 (1)：109～137

② 董作宾，傅斯年，郭宝钧．城子崖．南京出版，1934．71～72

数”、“隶首，黄帝之臣，一说隶首善算者也”……[①]。又有记载说：“自伏羲画八卦，由数起，至黄帝、尧、舜而大备”[②]。这里的传说人物伏羲、黄帝、隶首、尧、舜等的时代都在新石器时代中晚期，伏羲最早，相当于仰韶文化时期；其余则属于马家窑、齐家、大汶口等文化时期，与柳湾、城子崖等遗址的时代一致。李俨认为伏羲“是历史传说中最先知算的人物”[③]。伏羲的传说活动地点在今甘肃省天水市一带，那里有后人修的伏羲庙。天水县西北秦安县大地湾新石器遗址所初步反映出来的高文化水平，与有关伏羲的传说正相吻合。还有一种传说：倕（亦作垂）是黄帝时代（又有说是尧时代）人，“为规矩、准绳，使天下仿焉”[④]。这个传说和前述对图形的绘制和已具备的几何知识相一致。

根据上述事实，我们认为有关早期数学的传说，不是无稽之谈。至于是否真有那些人物，是无关紧要的，可以理解为那个时代有关对数学发展的人物象征。

第三节　从民俗和遗风理解原始社会数学

在数学发展到一定水平之后，那些粗糙的作图法、结绳记数、刻划记数等原始记数法就会逐渐被较先进的方法所代替。但绝不是在短时间内完全消逝，而是要延续很长时间，甚至数千年。在一些发展较晚的少数民族地区，直到晚近还保留着较为原始的记数方法。因此，要从民俗和遗风的角度探讨和理解原始社会的数学。尽管两者相距达四五千年之久，但总能在认识上有一定的帮

---

① 李俨．中算史论丛（第五集）．北京：科学出版社，1955．3～4

② 《汉书》卷二十一，上“律历志第一上”。

③ 李俨．中算史论丛（第五集）．北京：科学出版社，1955．2～3

④ 李俨．中算史论丛（第五集）北京：科学出版社，1955．4

助。

原始记数的方法在某些少数民族中保存的时间很长，有的直到现在还在使用。在国内一些博物馆内，可以看到陈列的少数民族刻木和结绳实物，现举一些例子如下：

佤族的记数方法。四五十年前，居住在云南的佤族普遍使用刻木（或竹）记数记事。他们的木刻一般用半寸至一寸宽的竹片，

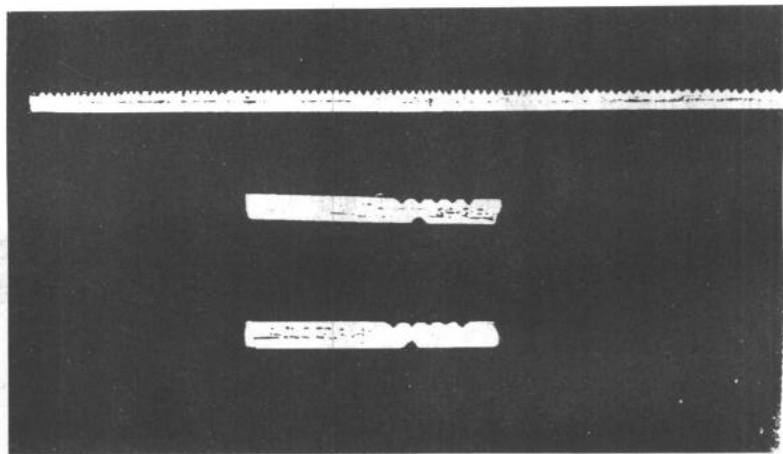


图 2·1·21 佤族刻木（藏中央民族大学）

长短不等，一边或两边刻口[①]。在中央民族大学文物室中陈列有40厘米长的关于婚姻纠纷的木刻，以及和谈通讯木刻（图2·1·21）。在云南省博物馆陈列着三件佤族的木刻(1984年还展出)，其中的一件如图2·1·22 (a) 那样。这件木刻是记载天数的：表示双方的事情经调解后，用来记日期。其上的每一刻口表示一日，每过一天削去一个刻口，削完双方即到会面地点讲和。另一件表示送信，削尖代表紧急，刻尖一端表示对方，上面的刻口表示日期，

① 国家民委民族问题五种丛书编写委员会《中国少数民族》编写组. 中国少数民族. 北京：人民出版社，1981. 360

也就是时限（图2·1·22(b)）。第三件是记帐木刻，尖端代表债主，中间代表中间人，根端代表借主。其上的刻口代表钱数，每一刻口代表多少钱要看钱数多少而定：可以代表1元，也可以代表5元。这是50年代初留下的实物。

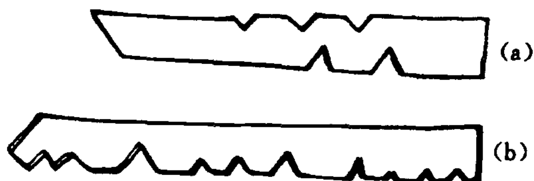


图 2·1·22
佤族刻木速描（原件藏云南博物馆）

佤族也用结绳的方法记数。在北京民族文化宫就收藏着一件佤族结绳实物，大约是1956年初搜集到的。是一条弯曲的藤绳，其上打着8个结，约长86厘米。由于没有其他记录，所以该结绳所代表的意思不明白。


图 2·1·23
佤族记帐木刻速描（原件藏云南博物馆）

傈僳族的记数方法。云南福贡地区的傈僳族直到50年代还在木板上刻划的符号记事或表意。例如在一块木板上刻着四个符号（图2·1·24），经当事人解释知其意思是："3个人（|||），月亮圆时（○），和我们见面了（×），现送上大、中、小三包土物，分别送给大、中、小三个领导（|||）。"①


图 2·1·24
傈僳族木刻

① 李家端．云南几个民族记事和表意的方法．文物，1962（1）：12～14

拉祜族和哈尼族的记数方法。居住云南澜沧拉祜族自治县的拉祜族，在 1957 年仍用刻木记帐。例如记载鸡数帐目的木牌是这样的：在木牌的正面和侧面都刻着缺口，正面的一个缺口表示 10 只鸡，侧面的一个缺口表示 1000 只鸡。这块木牌的侧面刻了四个缺口，正面有 20 个口，总共表示 4200 只鸡①。云南红河自治州元阳的哈尼族人买卖田地时，用单股的麻绳打结，表示地价银子数。每个绳结代表一两银子，结与结之间的距离相等，表示单位相同。如果最后两个结间的距离只有其他距离的一半，最后的结代表半两银子。打结的时候，买卖双方在场，要打成同样的结绳两条，各执一条②。



图 2·1·25　拉祜族、哈尼族的木刻与结绳

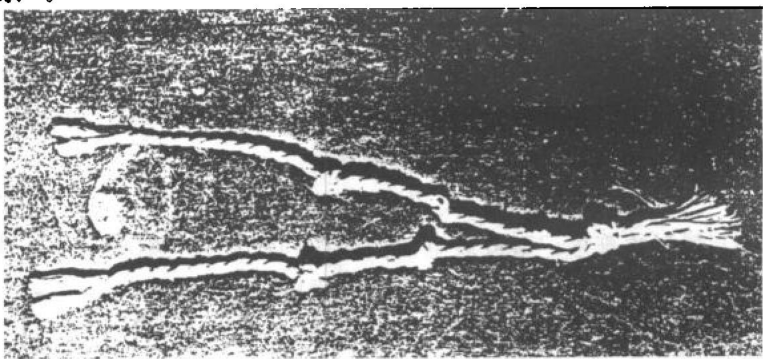


图 2·1·26　台湾高山族的结绳（藏中央民族大学）

① 李家瑞. 云南几个民族记事和表意的方法. 文物，1962 (1)：12～14

② 李家瑞. 云南几个民族记事和表意的方法. 文物，1962 (1)：12～14

台湾高山族的记数方法。台湾居住着不少少数民族，有的在台湾岛内陆，有的在周围的某些小岛上，我们统称之为高山族。在中央民族大学收藏着一件结绳实物（图2・1・26），是由两条双股麻绳合成的，每条麻绳上有两个结，结间距和两条绳的全长都是相等的，两绳又结在一起。这件文物毫无疑问是记数用的，但具体表示什么样的数则不清楚。几年前，在北京中国历史博物馆陈列着一份四五十年前的高山族象形文字借据（如图2・1・27），虽非结绳或刻木，但是一种原始的记数方法，现在这里做一简单介绍。两行象形文字所代表的意思用汉文"译"出来就是：右行"龙族人于一月二日向"，左行"虎族人借三百六十九钱"，合起来是"龙族人于一月二日向虎族人借三百六十九钱"。这里的数目字是用竖划表示由二到九，而一则是用一个象形的单个符号（如一月不画成"⏚"，而是"▽"），由低位到高位是从上往下依次排列，又是两行对照，因此所表示的位置一般不会出错或误解（图2・1・27）。

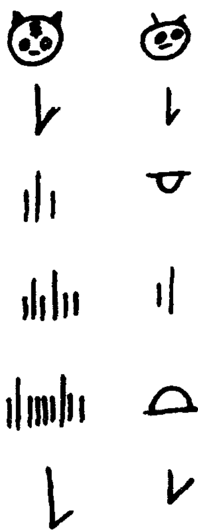


图2・1・27 台湾高山族象形文字借据速描（原件藏中国历史博物馆）

珞巴族和哈萨克族的记数方法。珞巴族居住在西藏自治区南部，人口有20多万。在四五十年前，他们"还采用着刻木、结绳记数记事的原始方法。"[①] 在中央民族大学文物陈列室还陈列着一件解放前用的珞巴族刻木记数记事文物。哈萨克族的牧区，在几年前还在使用羊毛绳打结记载羊数。

怒族和独龙族的记数方法。怒族主要分布在云南省怒江傈僳族自治州，由于没有本民族文字，所以传递公事、缔结盟约、买

① 《中国少数民族》. 283

卖土地等等，均以木刻为凭[1]。他们所用的刻木和结绳，因代表的

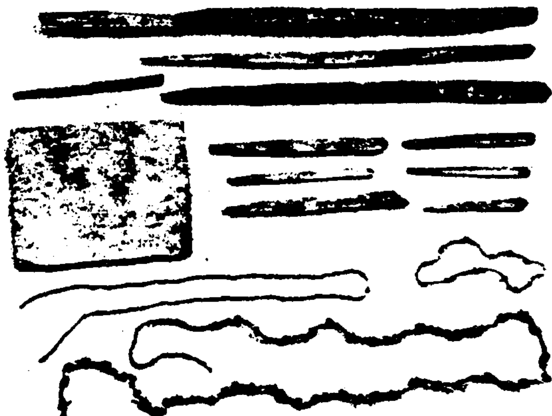


图 2·1·28 怒族的木刻与结绳

事项内容的不同而是各式各样的（图2·1·28）。独龙族主要居住在云南省西北部的独龙河谷，在过去也是采用刻木结绳记事和传递信息[2]。

基诺族主要聚居于云南省西双版纳景洪县境内，和附近其他少数民族一样，曾经用刻木、刻竹的方法记事和记数[3]。

通过上述情况，明显地表现出：刻木和结绳记数的方法在许多少数民族中普遍使用。有的刻木本身是为了记事，可是绝大多数都与数有关，因此就是记事也有记数的因素。记事木刻，毫无疑问是数学史研究的对象。通过这些活生生的刻木结绳等记数方法，使现代人可以在一定程度上理解原始社会的同类事务。可以说，少数民族的刻木结绳记数等民俗是原始社会人的遗风。这种

① 《中国少数民族》. 413

② 《中国少数民族》. 429

③ 《中国少数民族》. 437

遗风在汉族或其他民族中也长期存在，只不过是形式有所改变罢了。

除了上述两种普遍使用的原始记数方法外，还有其他方法，有的也有一定的普遍性。下面举两个例子，一个是古代的，一个是现代的。

50 年代在云南省晋宁石寨山出土的一件西汉铜片上，有羊头、牛头、人头、马头，带枷的人等等的图像(图 2·1·29)。全片分为若干段，有三段是完整的，第四段略残，第五段只剩一个边[1]，以下是否还有就不了解了。除了这些图像之外，还有三种符号："—"、"○"和"◎"，应当是代表数目的。通过观察可以发现：三种符号是个、十、百三个单位，由堆垒而成十进制。

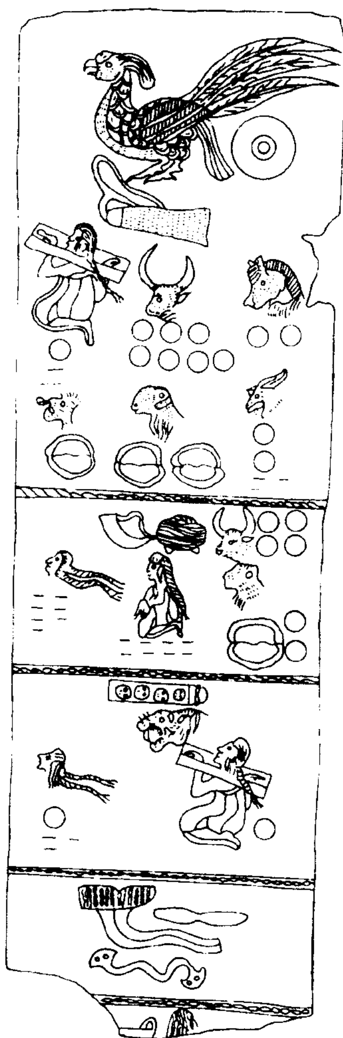


图 2·1·29　云南石寨山出土铜片上的记数法

[1] 林声．晋宁石寨山出土铜器图像所反映的西汉滇池地区的奴隶社会．文物，1975 (2)：69～81

它们表示的数目如（图 2·1·30）：

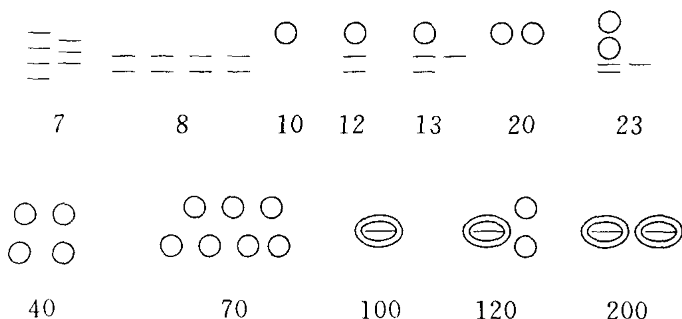


图 2·1·30 对石寨山出土铜片符号的数字释义

很显然，这种符号记数法可以表示一般不超过 1000 的任何自然数。在第一段“凤凰”图像的尾下有个符号“◎”，是否代表“千”？无法断定，肯定的可能性是存在的。如果是这样的话，那么这套符号记数系统在日常生活中所需要的数目已足够用了。这是古代滇越民族的一种创造，至于在多大的范围内使用过，目前尚不清楚。

另一种是目前一些羌族老人还能使用的记数方法，虽然是原始的，但是较为先进。他们在计算时没有专用工具，而是就地取材，把某些谷物如黄豆、玉米、大白豆、洋芋分别代表个、十、百、千位数，进行加减运算。现举一加法的例子：3456＋2138＝？先取 6 颗黄豆，5 颗玉米，4 颗大白豆，3 个洋芋，代表被加数；再取 8 颗黄豆，3 颗玉米，1 颗大白豆，2 个洋芋，代表加数，与被加数放在一起，再分类数数，共有 14 颗黄豆，8 颗玉米，5 颗大白豆，5 个洋芋，用 1 颗玉米换出 10 颗黄豆，就变成 4 颗黄豆，9 颗玉米，于是得和数为 5594。羌族人民还常用石子、木棍等做为

计算工具[1]。

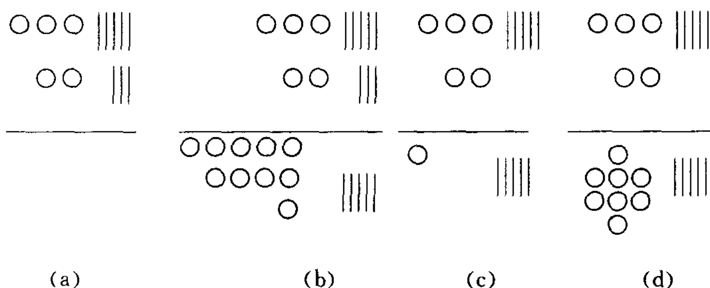


图 2·1·31　羌人的一种乘法运算示意图
（图中的横线是研究者加的）

羌族人民是否有自己的传统乘法运算，曾有不同看法。最近有人通过调查发现：羌人会用石子和木棍进行乘法运算。例如 35×23=？运算如下[2]：

（1）木棍代表个位，石子代表十位，排列如图 2·1·31（a）；

（2）先用乘数个位 3 根木棍乘 3 个石子得 9 个石子，把 9 个石子放在十位数下；再用 3 根木棍乘 5 根木棍得 15 根木棍，把其中的 10 根木棍换成 1 个石子放在十位数下，剩下的 5 根木棍放在个位下（图 2·1·31（b））；

（3）把乘数的 3 根木棍（个位）去掉，把积的十位数的 10 个石子也去掉，而在百位处放 1 个石子（图 2·1·31（c））；

（4）用 2 个石子乘 3 个石子得 6 个石子并放在百位处。再用 2 个石子乘 5 根木棍得 10，又在百位处放 1 个石子，十位处空着，个位处 5 根木棍不动。最后得积 805（图 2·1·31（d））。

① 周开瑞. 羌族数学史初探. 见：数学史研究文集（1）. 内蒙古大学出版社，九章出版社，1990. 17～23

② 周开瑞. 羌族数学史初探. 见：数学史研究文集（1）. 内蒙古大学出版社，九章出版社，1990. 17～23

羌族人民的计算方法在历史上具有普遍性，早期的匈奴族，后来的蒙古族等都曾有过就地取材（如羊粪珠等）作计算工具，进行简单记数。藏族在子盘上进行计算时，也常常用小石子、小玻璃块为工具。羌族人民的计算方法是古代人的遗风。

从基数的观点来看，原始社会的人只要能数出前几个自然数就知道了加法运算。首先掌握的是一些个“1”相加，即把若干个“1”堆垒起来得到一个大于“1”的自然数。进而把两堆数放在一起又得到一个新数，这时就要产生进位制，否则便无法进行计算了。羌族人民的计算方法给我们提供了一个标本。

第二章　甲骨文时代的数学

在石器时代之后，中国便进入了夏代，接着就是青铜时代的商朝。商朝已经有了著称于世的甲骨文，为数学史研究提供了新的更可靠的资料。本章以甲骨文为中心，主要讨论商代的数学。

第一节　数目与数词

按照目前比较多的人的主张，中国大约从公元前2100年前后建立了第一个王朝——夏朝，到约公元前1600年被商族灭亡，前后经历了约500年。夏朝的活动地区主要是在今河南省、山西省南部、河北省的一部分。但是，夏朝的文化现在还知之不多。商朝约建立于公元前1600年左右，到公元前1100年被周族灭掉。商朝的活动中心在河南一带，包括山东的一部分，早期的首都大约不太固定，传至第二十代盘庚时迁殷（今河南安阳市）。历史上，把迁殷以后的商朝叫做“殷商”，直至帝辛（纣）被灭亡为止。

通过长期的考古发掘与研究，确认商朝是一个文化发达的时代，科学技术也非常繁荣，在建筑、冶金、农牧业、医药、天文历法、气象、文字等许多方面都有重要成就。其中青铜器和甲骨文被认为是商朝文化的两大代表，和数学关系密切的是甲骨文。

商代统治者甚为迷信，占卜盛行。卜辞刻划在牛的肩胛骨或龟甲上，故称其文字为甲骨文。带卜辞的甲骨最初于清朝末年在河南安阳殷墟中被发现，100年来总共发现约10万片以上，大多为盘庚到帝辛灭亡时止的王室遗物。在最近出版的《甲骨文合集》中收有甲骨文拓片39 476片，正反两面用一个编号，因此拓

片的总数多于这个数目。甲骨文到底有多少文字，实无法统计，1965 年在《甲骨文编》中共收 4 672 字，“而其中有些字还可以归并；目前甲骨刻辞中所见到的全部单字的总数，约在 4 500 字左右。”其中只能辨认 900 多字[①]，仅有五分之一的样子。这些甲骨文虽然由于甲骨残破，多数构不成完整的句子，但是就已释读的文句来看，不仅是最早的系统的汉字，而且内容极为丰富。甲骨文中所包含的数学知识相当多，有的骨片上大部分甚至是绝大部分为数目字，是极珍贵的文字数学史资料。

甲骨文中的数字符号显然是由原始社会出现的刻划符号演变而来的，有些就是原来的形状，有的稍有变化。值得注意的是：由于实际需要，甲骨文中首次出现“百”、“千”、“万”三个数名，形成了较为系统的十进制。另外，同一个数目的符号有的也不一定完全一样，特别是六、九、千、百等多有差别。

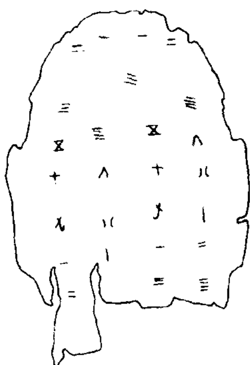


图 2·2·1
带数字的甲骨摹本②

甲骨文中的数目字及数名表

1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	二	三	亖	X	介 介 ∩ ∧	十	)( )(八	九 九 九 九

① 中国科学院考古研究所．编辑序言．载《甲骨文编》卷前。

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．21

10　20　30　40　50　60　70　80　90[①]

100　200　300　400　500　600　(700)[②]　800　900

1 000　2 000　3 000　4 000　5 000　6 000　7 000　8 000

9 000　10 000　20 000　30 000　40 000

通过上面的数字符号可知，凡是10的倍数的写法有明确的规律，10～40有两种写法，但都是用竖划，有的下端相连，有的不相连。50～90为一种写法，即在个位数字上加上10（即“丨”）。由100～900的九个数，目前有一个数（700）没找到实例，而其他8个数的书写有统一规律，就是在百（　）上加一个个位数字

① 王宇信．释“九十”．文物，1977（12）．77～78

② 外加圆括号的数字是根据推测填上的，未找到实例，下同。

(200，300 和 400 只加　、＝和≡横)，由此就可补上 700，应为 。更大的数目为 1 000～9 000 的九个数，其写法分为两段，前 5 个都有实例，都是把个位数分别加在“ ”的中部；后 4 个数缺两个实例（7 000 和 9 000），但已有的两个实例 6 000 和 8 000 分别把“ ”和“)(”加在“ ”上，而成为“ ”和“ ”，由此可知 7 000 和 9 000 应为“ ”和“ ”。再大的还有 10 000 和 30 000两个数目，目前未找到大于 30 000 的数目。根据 30 000 的写法，我们推测 50 000 以内的应和对应倍数的千一致；而 60 000 以后的写法，如按千那样写法就变得一个字，由于未见实例，就不好推测了。

非 10 的倍数的数目似乎没有独立的书写符号，只是在和某种事物相联系时出现过较小的两位数，如和“月”（ 或 ）相联的有 11，12，13，14 等，列举如下：

11 月	12 月	13 月	14 月

看来没有书写规律，大概是随便写的，只要有月字两侧写上 10（丨），再在其上或下加上 1，2，3，4 中之一就行了。这不是独立的符号。但是我们在甲骨文也找到了下面的几个例子，就是：

⊥[1]　　　　　　　　≡[2]

是否为 11 和 14？如果是的话，就说明有离开事物的两位数的数

---

1. 甲骨文合集．6，第 2397 页第 7 664 片。
2. 甲骨文合集．7，第 2925 页第 22 462 片。

码，可是这种实例极少，不好作出定论。至于个位数以至10，20，30独立存在的相当普遍，有的甲骨上几乎全是1～10的数字符号。

对于上面的讨论，有几个问题需要明确提出来：(1) 个位数既然能够离开对象而独立书写，说明个位数在当时已经抽象化；(2) 由1～4和10这5个数字符号是汉字一、二、三、四和十的前身；(3) 根据这些数字符号的写法可以推知，在商代还没筹码，这不等于没有算筹；(4) 商代是否用数目字表示次序，还是疑问，上面的11月等不一定是第11个月等的意思，就是商代的数目主要是基数。但不能说商代没有序数概念。这些问题将由下面的论述，得到印证。

甲骨文在使用数字记事时有多种方式，为了印刷上的方便，以下的讨论一般采用现今通用的汉字，而不用甲骨文。陈梦家先生曾对数词进行过整理和归类，我们大体上采用了他的研究结果。他所分的有下面六类：

一、整数——名词——连词——零数——名词，例

百邑又十邑。

十犬又五犬。

十月又一月。

旬又二日。

二、整数——名词——连词——零数，例

十年又五。

十牛又五。

十示又三。

十人又五。

和前一类的差别在于没有最末的名词“年”、“牛”、“示”和“人”。

三、名词——整数——零数，例

　　兕一百二十七。

　　四、名词——整数——连词——零数，例

　　兕一又九。

　　豕三十又二。

　　鹿五十又六。

　　五、整数——零数——名词，例

　　十五羊。

　　五十五牢。

　　六、名词——整数——连词——零数——单位词，例

　　人十又六人①。

陈梦家所说的“零数”是相对于十的倍数而言的，实为个位数。纵观全部甲骨文中有关数词的构成方式，可以说是多种多样的，没有统一的规则。

　　下面讨论一下甲骨文中关于数字的词意问题。

　　（一）数字一、二、三、四。其词意是极其简单的，是任何人都会想到用一些最简便的笔画如“一”，或“·”表示开头的几个自然数。中国古人采取了画“一”的方式，因而形成了一、＝、≡、≣，没有什么特殊的含义，仅仅是前 4 个自然数的符号而已。

　　（二）数字五。大于四的自然数，如果继续用前 4 个数字符号那样的方法去表示五、六、……自然数就会产生一些不好处理的问题，因此必须创造新的数字符号。首先遇到的便是“五”。数五还可以勉强地用 5 个横划“≣”来表示，可是划多了就容易产生混淆，于是采用了“㐅”这个符号，“㐅”无疑是由“×”演变而来的，而“×”的出现又应是来自简化“≣”的结果。

　　（三）数字六。甲骨文中“∧”与“亼”并用，而在石器时代末期已有“∧”，是由简化 6 个横划而来，由“∧”到“亼”的过

① 陈梦家．殷墟卜辞综述．北京：科学出版社，1956．109～110

渡显然是在商朝。符号"∧"有缺点，易于与相似的符号")("、"△"等混淆，所以便由"∧"到"⌒"，再到"入"。

（四）数字七。符号"十"可能是由于设法与前6个符号区别而创造出来的，"十"是甲骨文中能与其他符号相区别而笔画为最简者之一，不会有任何别的意义。

（五）数字八。甲骨文中的")("可能有分开、一半的意思，因分字作"㸚"，半字作"半"，上边都是")("或与其相近的字。然而，古人造字应是先有独立的符号")("，之后才能与其他符号相结合而成为新的符号，倒过来的可能性不大。")("这个符号也应是选取的笔画最简者。

（六）数字九。甲骨文中的九用符号"九"或"九"或"九"，像一种带有前螯而游动的虫子。

（七）数字十、二十、三十、四十。数目到九已到尽头，古人没有造出更特别的符号表示下一个数目，而是把"一"竖起来变成"|"表示十。同理便有"‖"、"|||"和"||||"分别为二十、三十和四十。但是这种竖起来的符号易与其他符号混淆，所以就把后3个符号的下端用横画或斜画连接起来，以与其他符号相区别。还需注意到，商代还有人使用竖画，不过用的不多了。

（八）数名百。百、千、万这三个字具有单位名称的意义，当然一和十也有这种性质，但是一、十是极容易形成的，而百等就要难得多了。在人们有了"百"的概念的时代，文化水平已经达到了较高的程度，能够借用的或利用的符号自然较以前要多得多。这样，在由"一"进到"|"的办法行不通后，便采取新的途径。从形状"白"或"白"来看，很像人头或兽头，原为"白"，"百"与之相通。可是，由于二百、三百等的出现，为了整齐划一起见，便在白或白上加一横而变为百或百，再变成百或百，就离开原形了。实际上，在商代后期这两种字形仍然并用。

（九）数名千。甲骨文中的千为“ ”或“ ”，是由人（“ ”或“ ”）和一构成的，是先有人和一，而后才有千。 的字意大约是表示一个完整的人，其四肢和各种器官很多，因此千的本字应当就是人。但为与人（ ）字区别，且与二千、三千等写法的划一，而在其中部加了一横画。

（十）数名万。甲骨文中的万字为“ ”，是个蝎子的形状。蝎子的头胸部有许多对螯肢和脚，一时数不清到底有多少，总起来看就是“多”，故取其形象为万的符号。

通过上面的论述，可以得出如下的一些初步结论：

1. 在商代已经形成了完整的十进制系统，个、十、百、千、万五个十进制等级的数字都能准确地表达，已经有一套叙述方式，尽管表述形式存在多种，但都能准确无误。至于有些数目，如“十月二”该作如何理解，可能有分歧，这不能认为是不准确，而是我们没有清楚地掌握商代人的用字规律。很显然，商代对于某一数目的表述还未形成位置制，因为没有“零”位的表示法，仅是和数名连在一起的数名制。

2. 甲骨文中四十以前的符号和表达方式是石器时代的沿袭和发展，基本上不是新东西。五十、六十等则未见于石器时代的陶器上，可能是商代人创造的。这一点，目前还不敢十分肯定，要取决于今后的考古发现。至于百、千、万等数名，我们认为是商代人根据实际需要而形成的，其符号也是他们的创造。从五十起的十的倍数的写法，无疑是出于商代人之手。

3. 对于数名的各种解释中，只有极少的可能符合当初造字的原意。绝大多数的解释都是在那些数字符号流传了很长时间以后才赋予的，例如许慎《说文》已经离商代灭亡都有一千二三百年了，他的解释只能代表汉代或上推到春秋战国时代。商代及其以前的人们，虽然有各种信仰，已经有了不少知识，但是和后来的人相比，其思想当然还很单纯，不太可能用一些社会现象去解释

甚至编造数字符号。

第二节　算术运算和数字排列

商代人既然已经知道3万这么大的数目，那必定会某些算术运算，掌握了一定的算术知识。然而遗憾的是由于甲骨文只记录数字结果，而不记录运算过程，因而在甲骨文中就没有找到运算的实例，给我们研究商代算术运算造成了困难。这样，我们不得不进行一些自认为合理的推测。

在商代，人们所知道的数目仅是一个有限的自然数集合，尚未发现分数或小数。由此推知：当时不可能有除法运算，至于把一些物品或军队的士兵分为数目相等的若干份不仅是极可能的，而且一定很普遍，是为除法运算的萌芽，但是和真正的除法运算完全不同。在这个集合中，加法和乘法一意可行，商代人肯定会进行加法运算，因为这是人类最容易掌握的一种算术运算。乘法在商代也可能产生，实际上算术的乘法运算只是一种相同的数目的连续相加，这种加法无疑会经常遇到，久而久之便产生了乘法而不必再进行连续相加了。由加法到乘法的关键是九九表。有了九九表，个位乘个位数念一次九九口诀乘积就出来了；两位数以上的数相乘还要少量的加法来辅助。但是，目前我们还没有在甲骨文中找到九九表，不过不能断定一定不存在。至于减法运算在自然数集合内不能一意地进行，只能在被减数大于减数时才能作减法运算。我们推测，数目很小的减法在商代可能存在，不过不一定能普遍施行。

根据个别的例子，大体可以窥见一点商代的算术运算。在一片甲骨上有四列数字，即50，30，20和15，每个数字出现三次（图2·2·2）。释文可排列如下：

五十犬　五十羊　五十豚

三十犬　三十羊　三十豚

二十犬　二十羊　二十豚

十五犬　十五羊　十五豚[①]

由于骨片上端不完整，五十（ㄨ）只有一个比较清楚，因此人们有不同主张，李俨[②]、李迪[③]等认为是有最上的一列，而陈梦家则没列入最上一列[④]，说明他不承认这列数字。实际上，经仔细观察，最上一列数字是存在的。

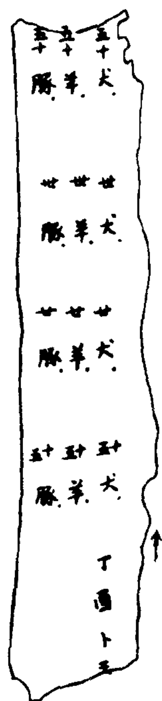


图 2·2·2

这个实例包含着一些数学规律，可能也用到了运算，李俨作如下解释：

$50-30=4\times5=2^2\times5$

$30-20=2\times5=2^1\times5$

$20-15=1\times5=2^0\times5$

说这些结果含有等比的概念，而原来的 4 个数目都是 5 的倍数。[⑤] 后一看法显然是正确的，前一看法就值得商榷了。上面的解释不仅有减法和乘法运算，而且还有了指数概念，可能性不大，商代不可能形成指数概念。我们认为这四列数字可能通过加法和乘法获得，是否有减法难以确定。

甲骨文中对于数字的排列都有一定的规律，根据这些规律可以窥见商代人已经掌握或可能掌握的数学知识。连续排列的数目字绝大多数到九为止，少数的到十（|），超过十的极为罕见。下面举例加以说明。为了使读者能进行独立分析，我们按

① 郭沫若．卜辞通纂．摹本第十六片引《殷墟书契前编》三·二三·六

② 李俨．中国古代数学史料．北京：中国科学图书仪器公司出版，1954．5

③ 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．22

④ 陈梦家．殷墟卜辞综述．北京：科学出版社，1956．108～109

⑤ 李俨．中国古代数学史料．北京：中国科学图书仪器公司出版，1954．5

甲骨文原来的排列位置予以摘录，仅仅把甲骨文字改为现代汉文文字。

第一类：前若干个连续自然数的顺序排列。

例1　一、二、三、四、五、六、七，在同一片龟甲上有一列由一到六，都是竖排，从正中分成左、右，左到六，右到七[①]。

例2　次序由右到左（即右小左大）横排，排列：五、四、三、二、一[②]。

例3　由上到下逆序排列：六、五、四[③]，但是骨片上下端均残缺，估计还应有字，至少往下还有三、二、一，上面就不好推测了。

至于由右到左(即右大左小)的横排的例子相当多,不另列举。

第二类：某个自然数的重复排列。

例1　反复出现同一个自然数，在一片甲骨上“二”字出现了24次[③],因骨片残缺,可能整个骨片上的“二”字比24个要多些。这24个“二”字可分为四组，用横、竖线隔开，每组6个：上两组呈1个、2个和3个的排列，下两组各呈两竖行。这种排列有什么意义，目前还不清楚。但未发现其他数字。

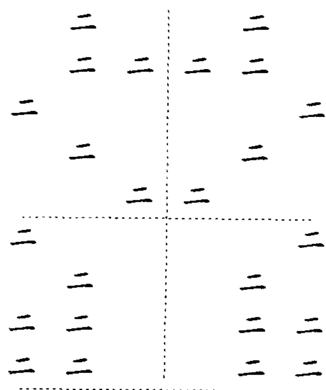


图 2・2・3

例2　在一个甲骨的残片上包含有“一”、“二”、“三”和“五”四组数字，中间的上端有两个横排的“一”，其左下和右下各为一竖列

① 甲骨文合集，2. 第573页第3333。

②③甲骨文合集，2，第593页第3521正。

③ 甲骨文合集．3，第969页6483正。

“二”，左列“二”的左侧为两行“三”，右列“二”的右侧为一行“五”[1]，实际上可能是二行“五”，因甲骨残损而不见了。

例 3　分段重复排列，有的连写几个“二”接着几个“三”，每两字中间有较大距离；有的连写几个“一”，似乎是把其旁的文字分为几段。

第三类：左右对称排列。这类的例子很多。

例 1　在一片残甲骨上找到由一到十的数字 40 个[2]，还有些地方模糊不清或有残损，根据整个排列我们补上 8 个数字，用方框圈起。如果从中间上下画一条直线，恰好分成左右对称的两部分（如图 2・2・4）。

	九	八	七	七	八	九	
六	五	四	三	三	四	五	六
	三	[二]	一	一	二	三	
	六	[五]	[四]	四	五	[六]	
	三	二	一	一	二	三	
	六	[五]	四	四	五	[六]	
		[八]	七	七	八		
		十	九	[九]	十		
		一			一		

图 2・2・4

例 2　在另片甲骨上还有更复杂的左右对称排列的数字，如果说上个例子可以上下分为二段的话，那么这个例子就可以分为三段，每段都左右对称。当然其中也有些残破或不清之处，补上相应的字后，很完整[3]（图 2・2・5）。

还有其他的许多对称的例子，这里不再列举。但是值得我们深思的是，商代人对数字的排列有较多的认识，达到了较高的水平。

第四类：奇偶分开排列。

---

[1] 甲骨文合集. 3，第 802 页 5532 正。

[2] 甲骨文合集. 2，第 420 页 2002 正。

[3] 甲骨文合集. 2，第 377 页 1656 正。

例 1　在一龟甲的正面上有 28 个数字，上下分为 4 列，每列 7 个字[1]。用十字线将其分成 4 个组，上两组各 6 个字，下两组各 8 个字。这样，每组的竖列每列或是奇或是偶分别的清楚，无一混乱，且下两组左右对称。(图 2・2・6)

			七						七		
六	五	四	三	二	一	一	二	三	四	五	六
二	一	十	九	八	七	七	八	九	十	一	二
?	七	六	五	四	三	三	四	五	六	七	?
		二	一	十	九	九	十	一	二		
	五	四	三	二	一	一	二	三	四	五	
		九	八	七	六	六	七	八	九		
		四	三	二	一	一	二	三	四		
			三	二	一	一	二	三			
			六	五	四	四	五	六			
			九	八	七	七	八	九			

图 2・2・5

例 2　在一片龟甲的下半截有 18 个自然数，分为上下四列排列。中间两列都是由 1 到 9 的 5 个奇数，外边的两列都是 4 个偶数[2]。它们左右对称。但右边有微残，如二、八所在位置看不清，这很容易补上（图 2・2・7）。

二	三	二	三
四	五	四	五
六	七	六	七
二	一	一	二
四	三	三	四
六	五	五	六
八	七	七	八

图 2・2・6

例 3　还有一种特殊的奇偶排列，如图 2・2・8，其上部奇偶排列上有交叉的情形，从线连接即可看出。其下部出现了循环的现象，即十下接二、四，九下有一、

① 甲骨文合集．2，第 490 页 2530 正。

② 甲骨文合集．2，第 555 页 3201 正。

三。因有残损，下面是否还有数字无法判断，即使有也不过每行两三个。根据这种循环现象，可知商代人在数字的使用上一般到十为止，过十则再从一开始。

第五类：前 9 个自然数的分三段排列。分段排列的情况在甲骨文中比较常见，例如一骨片上有由左（小）到右（大）分两段的横排，即一、二、三、四、五、六；七、八、九、十，下面又出来一、二、三、四[1]，如图 2·2·9。其他情况还有，前举的《甲骨文合集》2 中之第 1 656 正片就有多种分段。我们这里要讲的是前 9 个自然数分三段排列的问题。

例 1　上举 1 656 片正面的下半部分就包括两个对称的这种排列。

例 2　在另一甲骨的下半部也呈三段排列，上半部是两行自然数（图 2·2·10）[2]。

例 3　独立的三段排列，也能在甲骨文中找到，有一个是由右（小）到左（大）排列的。

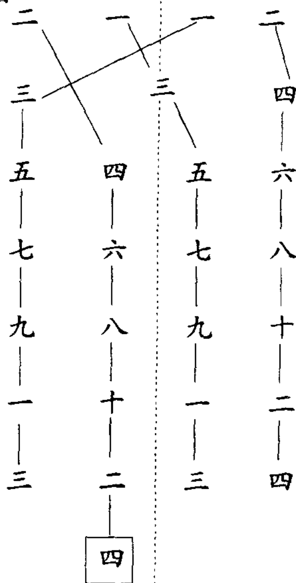


图 2·2·7

图 2·2·8

这类排列有一个共同的特点，就是把它们左旋或右旋 45°（如图 2·2·11 (a)，(b)），便得到了 3 阶不完全的纵横图，如果把一与九、三与七分别对调就得到了现代意义下的幻方（magic squ-

① 甲骨文合集. 2，第 375 页。

② 甲骨文合集. 1，第 20 页 98 正。

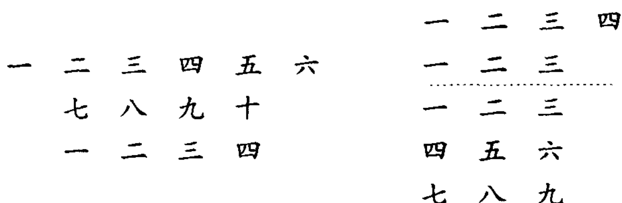


图 2·2·9　　　　图 2·2·10

are)，因此有人已提出纵横图起源于甲骨文的论点①。尽管这个论点还有待于进一步探讨，但是后人从这里得到启发而形成三阶纵横图也是可能的。

由上述的各种情况来看，商代人对自然数已经相当熟悉，而且掌握了一些规律，他们对数学排列的对称性似乎有所偏爱，在很多龟甲上都左右对称地排列着两列自然数。奇偶分列也是商代人很重视的事。

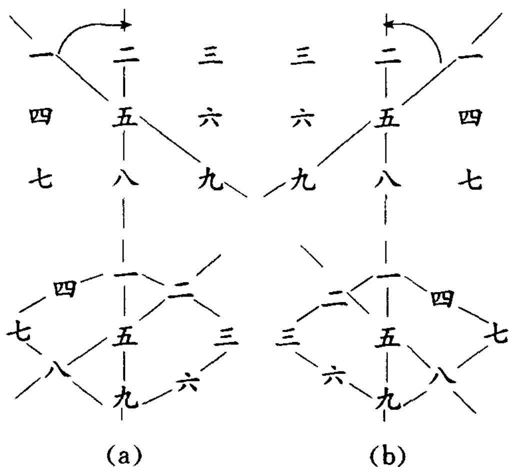


图 2·2·11

① 陆思贤. “纵横图”的考古学探索. 见：数学史研究文集（2）. 1991. 15～23

第三节　顺序的概念

商代人在数字方面多属基数的范围，可是他们也有序数概念，把自然数按由小到大或由大到小的次序排列已是相当普遍的。然而明确地说“第一”、“第二”、……等事例则不多见。商代人排次序主要是用干支，还有些甲骨文中也有用数字分段的，可能包含有次序的意义。

在中国历史上长期用干支纪年纪日，甚至早期还用作人名，例如商代的帝王除第一帝汤外其余的名字的第二个字全是十干中的某一干，大丁、外丙、仲壬、太戊、大甲、南庚、武乙、帝辛、雍己等都是。这种叫法可能起于夏代，在传说的夏代帝王中已有孔甲、履癸等带有十干的名字。由此可见，最先出现的是十干，到商代则有了十二支，并与十干相配，于是便出现了甲子、乙丑……壬戌、癸亥等 60 对一循环的顺序排列。在甲骨文中有大量的干支表，光是殷商第五期被搜集起来的干支表就有七八十份之多，绝大多数甲骨都有残损，或是表本身不够 60 对干支，但是完整无缺的干支表，尚有少数的达到 60 对[1]（有缺损，可补上）。其中连续 30 对的有 40 份，占 50%，这必有特殊意义。没见到横列的，全是由上到下竖行排列，而且都是甲起头，10 对一行，非常整齐。目前所见到的干支表，绝大多数都是把甲子作为第一对。在图 2·2·13 中给出的完整的前三甲，共 30 对干支的表，在其左侧还有离开前三甲而字较大的 5 个字，即“甲子乙丑丙”，其中丑字看不清楚[2]，似乎还想再刻一第一甲，而字过大刻不下去就放下了。

在图 2·2·14 中是前三甲的重复，构成一份 90 对干支的干

---

① 甲骨文合集. 12，第 4718～1737 页 37986～38062。

② 甲骨文合集. 12，第 4726 页 38017。

支表，都是起甲子到癸巳①。



图 2·2·12 完整的干支表

① 甲骨文合集. 12，第 4723 页 38007。



图 2·2·13　38017 片拓片



图 2·2·14　38007 片拓片

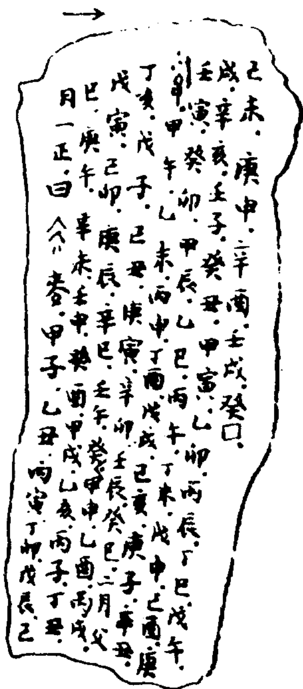


图 2·2·15

还可以找到前一甲、前二甲、前四甲和前五甲的例子，也有不太整齐的干支排列。最使人感兴趣的是有这样一块甲骨，其上有“月一正”和“二月”字样，前三字下面有“曰**夵**麦”三字，接着是前三甲；“二月”下面有“父[illegible]”二字，接着是第四甲到第六甲，但最末一对缺“亥”字[1]（图 2·2·15）。这份干支表显然是表示两个月的日序，前一个月是 30 天，后一个月最末一天缺“亥”字，是否表示半天，而不是漏刻的呢？不好下这种结论，我

① 郭沫若. 卜辞通纂考释. 干支类第六片。

们还未找到类似的例子，凡是看到结尾的全是完整的，因此“亥”是漏刻。

商代人用干支表示顺序已是一种很普遍的习惯，日子几乎全用干支记载，顺序的概念非常清楚。

在甲骨文中有很多这样的数字排列，就是把一些文字用数字分段，大约有三种类型，现举几例如下：

例 1　用前几个连续自然数把若干堆文字分成段落，例如在一片龟甲上竖列对称地两列一、二、三、四，其他文字也分成相应的两个四堆[1]，显然有编号的作用。

例 2　用某一自然数（常见的是一、二、三）把一串文字（不一定是单行）分成若干段，例子很多。

例 3　用某一自然数（常见的是一、二、三）与干支相配合分段，如在一甲骨上用“二”配合以“辛丑”、“癸巳”、“乙未”、“癸巳”、“癸巳”、“癸巳”



图 2·2·16

[1] 甲骨文合集. 1. 第113页466.

分段，而“二”均位于干支第一个字的左上方。(图2·2·16)，干支的右侧还有其他方文字[①]。

这后面的两个例子，虽然不是用连续自然数把其他文字分为若干段落，但是此种分段的作法仍有次序的含义，不过没有按一、二、三、……连续自然那样明确罢了。

第四节　数学工具

商代的数学已经达到较高的水平，必然有相应的工具进行计算，也还要有画图工具。

早期的计算和记数方法，如结绳记数、刻契记数等，在商代可能还存在遗风，很难说在甲骨文中全是卜辞，也许有刻契记数。

甲骨文中，从现代人的研究来看还未见有“数”这个字，实际上是存在的。现在的“数”是由“娄”（音 lóu）与“文”合成，甲骨文里没有，而有另外一个字“[illegible]”[②]，是由“束”与“文”合成的，造字原意显然与结绳记数有关。后来从文从束的“敕”字代表了君命，且与“策”字的意义相同，具有算筹的概念，君命就是颁布一把筹，上面写着某些数字。但是“束”是丝的计量单位，字的象形“[illegible]”就是一束蚕丝，中间是结，也就是结绳记数。由“束”到“娄”有个过渡。“娄”字的同音字“缕”，指的是丝缕布条、麻绳，字义与“束”字相近。扬雄（前53～后18）在《方言》中说：“褛谓之緻”，原注称：“褴褛缀结也”[③]。因此

---

① 甲骨文合集. 11，第4263页34240。

② 甲骨文编. 第720页附录上引《殷墟文字甲编》六一六。

③ 〔汉〕扬雄. 方言.

“娄”字原义也是结绳记数的象形字[①]。在甲骨文中还有一“[illegible]”字[②]，可能就是“娄”的原形。“娄”与“文”合而取音“束”(shù)，也就是由“[illegible]”到“数”，取偏旁[illegible]（束）的音。这就说明“数”字虽然出现较晚，但是它来源于甲骨文，其原义是结绳记数。

中国早期的计算工具主要是筹，也叫算筹，是用竹木棍或草棍做成的，最初不可能有专用的棍，必然是用一些现成的东西进行计算。在商代非常迷信，占卜盛行，而占卜就要使用一些小木棍之类的东西作计算，这就是最早的算筹，是与占卜合用的。甲骨文中没有“算”（又作筭）和“筹”两个字，可认为没有专门用于计算的工具——算筹。可是在甲骨文中有“册”字，作“[illegible]”[③]，后来的“策”应是从册同音通借而来，和算筹有时有同一个意思。

甲骨文中虽没有“筹”字，而有“畴”字，作“[illegible]”，取义为沟洫之间田地的众多，因此有数学的含义[④]。

我们推想在商代可能有一种特制的工具，把它取名为“算中”。在甲骨文中有“[illegible]”字，目前还未得释读，认为是“史字从此”[⑤]。但另有“中”字。王国维对史字解释说：“持中为史，持笔为尹”[⑥]，他还说：“其初当如中形，而于中之上横凿空以立算，达于下横，其中央一直，乃所以持之，且可建之于他器者也。”[⑦] 这种说法有一定道理，史官所持之“中”即为算中，它大概是由两

---

① 陆思贤，李迪等. 数概念和数目字在我国的起源与形成. 油印本；陆思贤，甲骨文金文中的数码和数字. 油印本. 1978。

② 甲骨文编. 第735页引《殷墟文字乙编》七七四一。

③ 甲骨文编. 第87～89页。

④ 李迪，陆思贤. 中国早期的算具. 见：数学史研究文集（2），1991. 24～26

⑤ 甲骨文编. 第642页。

⑥ 甲骨文编. 第17～18页。

⑦ 王国维. 观堂集林・释史。

片平行的木板贯穿在一根木棒上，上面那块木板有一些孔眼，下面那块木板则对应地有一些槽穴，算筹就插入孔眼而稳定于槽穴内。在算中上，算筹是一根一根立着的[1]（如图 2・2・17）。

这种算中不是专门用于计算的工具，是商代统治者放置筹的用具，进行占卜或计算时把立在算中上的竹木棍等取下，其占卜或计算的结果则由持笔的尹记录下来，实则是刻在甲骨上，也就是甲骨卜辞。

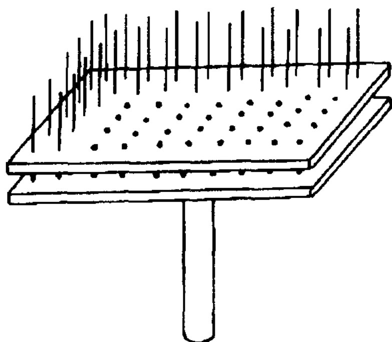


图 2・2・17　“算中”推想图

商代几何学知识方面，人们常常提到的首先是两种画图工具——规和矩。李俨说：“上古应用规矩两器制作方圆，其源很远。甲骨文有规字作[illegible]，像手执规画圆，矩作 [，像曲尺形（两个直角三角形）；又甲骨文石字作[illegible]，像直角三角形。”[2] 查甲骨文中有“[illegible]”、“[illegible]”和“[illegible]”等字[3]，就是李俨所说的规字。李说实本于郭沫若。郭在释甲骨文“隹我奚不[illegible]。贞[illegible]”时特别解释了“[illegible]”字，他说：“[illegible]字余释为规，古金文畫字作[illegible]，从此从周，盖谓以规画圆也。……[4] 其中的“[illegible]”应当就是“[illegible]”，但是拓片的照片上字迹不清[5]，难以辨认，甲骨文原字形状不好断定。

关于“ [”无人作详细解释，是否确实是矩也暂置不论。但是，在商代已有作图用的矩应无问题。

① 李迪，陆思贤．中国早期的算具．见：数学史研究文集（2）．1991．24～26

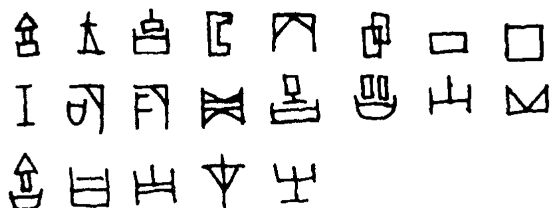
② 李俨．中国古代数学史料．北京：中国科学图书仪器公司出版，1954．8

③ 甲骨文合集．（2）538～541

④ 郭沫若．卜辞通纂考释．第四八五片。

⑤ 郭沫若．卜辞通纂考释．第四八五片。

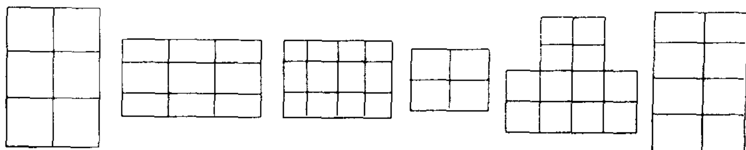
在甲骨文中，现在尚未发现有非文字的几何图形，不过有些文字本身具有图形性质，现列举一些典型的文字如下：



在这些文字中绝大多数具有对称性，从几何学的角度来看包含垂直、平行、直角、正三角形、等腰三角形、直角三角形、矩形、正方形等。

尽管它们不是独立的几何图形，多少也能反映出当时所具有的几何知识。

在甲骨文中有许多画成方格的文字，如



等均释为田字①。很显然，由小方块可以计算面积，李俨认为“这些小方块就是田，从此可知在殷代已知道如何将田地分割为若干小方块，具备了计算面积的知识，由此导出后来的井田制度。”② 由于面积计算的需要，建立乘法计算法则是当然的事情。

商代已能进行水平和垂直测量，这也需要一定的几何知识。在出土的商代文物和保存下来的某些遗迹，可以初步推断出当时的几何水平。例如车辐的均匀排列，青铜器的形状和图案，宫殿和

① 甲骨文编，第522页。

② 李俨．中国古代数学史料．上海：中国科学图书仪器公司出版，1954．10

城墙等建筑工程等等，都反映着几何的内容，等分圆周、某些容积、高度和长度等各种几何知识，商代人都应当是熟知的。

甲骨文中有离开具体对象的数字，而没有出现作为研究对象的几何图形，也没有从其中找到明确的几何问题，与算术相比，水平低于算术。中国古代通常是把几何问题化为算术问题予以解决，传统数学的实用性已在商代露出端倪。

第三章 金文中的数学知识

金文即钟鼎文，或称彝铭，是指刻在青铜器上的铭文。这种文字始于商，盛于西周，下延至东周列国。但商代文字以甲骨文为主，而东周则属简策文期，虽偶有长铭巨制，实乃西周彝铭的尾声。所以本章讨论的数学知识，主要取材于西周时期的金文。

第一节 时代背景

殷商末期，羌族的一支——周族，兴起于陕西渭水流域。由于商纣统治腐败，殷族内部矛盾尖锐，许多殷族部落投奔周族。周文王逐渐成为西方各部落联盟的盟主，他积极组织畜牧业和农业生产，并向东进攻，威胁殷人。不久，其子武王率兵伐纣，于公元前1120年左右灭商。周人一方面把商的奴隶解放，一方面把商的土地宣布为周王所有，即《诗经》所云："普天之下，莫非王土。"周王将土地和百姓分赐其亲属、左右及各部落首领，让他们在分封的土地上建立起一个个庄园。于是，许多原来的奴隶转化为农奴，得到一定程度的自由，生产积极性大大提高了，使商末生产衰落的局面得到迅速改变。周代初年，农业已成为社会经济中最重要的生产部门，而采集和狩猎活动则只是农业经济的补充了。当时的耕作规模很大，收获很多。《诗经》云："曾孙之庾，如坻如京"[①]，就是说奴隶主们的高大粮仓像岛屿和山峰一样。

武王死后，子成王年幼，周公旦继立。周公是周族的杰出领

① 袁愈荌译诗、唐莫尧注释. 诗经·小雅·甫田. 贵阳：贵州人民出版社，1981

袖，他镇压了殷人及一部分周贵族的叛乱，继续东进，把周的势力扩张到黄河下游。这就是历史上有名的周公东征。东征胜利后，周公采取了几项强有力的措施：一是营建东都洛阳，进一步巩固了周的统治；二是把兄弟子侄姻亲功臣，都分封于外，让他们带着家族武装力量及俘虏到指定的地方去垦殖、防守，建立起大批诸侯国。特别值得一提的是，周公对殷文化采取虚心接受和学习的态度。他除了吸收殷人制造青铜器的技术及农业技术外，还让周人学习殷人的文化艺术，从而产生了殷周两族混合的文化。这为周代及后世文化的发展，奠立了良好的基础。

商周经济与文化的发展，突出地表现在青铜器的制造和使用上。商中期到西周前期是青铜冶铸的鼎盛时期，人们不仅能根据不同需要来掌握合金中的铜、锡比例，而且能熟练使用分铸法等先进技术，制造出大量精美的青铜器。西周时，青铜农具的种类和数量都增加了，从翻土、中耕锄草到收割的农具都有用青铜制造的。青铜手工工具就更多了，包括斧、斤、凿、刀、锯、锥、钻等。周统治者还掌握着一支用戈、矛、钺、镞、剑等青铜兵器武装起来的军队。可以说青铜器是这一时代的标志，它典型地代表了当时的文化和科技水平。

20 世纪以来，我国出土了大批商、周时期的青铜器，包括各种兵器、祭器、食器、乐器、酒器等。许多器物刻有铭文，少则几字，多则几百字。这些铭文是我们研究古代文化的宝贵资料。据黄然伟先生统计，已发现的西周有铭铜器总数，约有三千之多[①]。郭沫若先生曾于 30 年代著《两周金文辞大系》，释出 251 件周代铜器上的铭文。80 年代，徐中舒先生又著《殷周金文集录》（1984 年出版），列举了中华人民共和国成立后出土的有铭铜器 900 余件，原文与今文对照，颇便查阅。

① 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978

精美的青铜器，反映了古人高超的技艺；隽秀的钟鼎文，是我们祖先智慧的结晶。但由于时代的局限，钟鼎文所反映的社会生活内容是不够宽广的。因为钟鼎文多是纪念性文字，是周王朝以战胜者资格的纪胜铭功之作，必为周王朝建立功勋而又有相当财力者，方可铸这类铜器，以为“子子孙孙永宝用”（这是许多钟鼎文中的套话）之物。由于铸这种铭文十分费工，远不如把字写在竹简或纸、帛上省力，所以铭文字数很有限。即如西周重器毛公鼎，铭长亦不过497字。然至今发现的西周金文中，尚无比此再多者。所以金文内容远不如后来的简牍文字丰富。

据容庚先生的金文字典《金文编》，可识的金文不满2000。但使我们感兴趣的是，这些金文中已含有相当可观的数学知识。我们有理由说：由于社会生活的需要，周代数学知识比商有了进一步的发展和普及。

首先，周王朝的赏赐特多。周王或高位之臣主册命某人司某职时，常赐以车马服饰、土田等物；对立了战功的人，常赐以土地、奴隶等；在祭祀时也要行赏。各种赏赐都有一定数量，因而数字便广泛出现在赏赐铭文中。例如不㠱毁铭：“伯氏曰：‘不㠱，……女（汝）多折首执讯……肇敏于戎功。锡（赐）女（汝）弓一矢束，臣五家，田十亩’。”[①] 这显然是因战功而受赏之实例。剌鼎铭：“剌祭，王易（赐）剌贝四十朋。”[②] 德鼎铭：“隹三月，王才（在）成周，延武王，福自蒿，咸。王赐德贝二十朋。”[③] 这两段铭文记载的都是因祭祀而受赏。后文中的成周指洛阳，福指祭祀的酒肉，蒿即周京城镐京，咸表示事愿成就，德是从镐京来的祭祀

---

① 郭沫若. 两周金文辞大系.（日本）株式会社开明堂，昭和七年（1932年）. 102 不㠱（ji），人名。毁（gui），青铜食器。讯，俘虏。

② 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 125

③ 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 隹，wei，通惟，发语词。

武王之使者。

其次，西周的许多铭文是为记载战绩而作。杀敌多少，俘敌多少，缴获多少物资——这些问题在铭文中都有反映，这是数学的另一用武之地。如虢季子白盘铭：“（虢公）折首五百，执讯五十，是以先行。”[①] 多友鼎铭：“多友西追，甲申之晨，搏于祁，折首二百又五人，执讯二十又三人，俘戎车百乘一十又七乘。”[②] 都是这类实例。

第三，周代历法比商代更完善了。在纪年、纪月、纪日的过程中，不仅有基数词，而且序数词也得到发展。

另外，随着农业生产的发展，数字常被用于统计收获物的数量。借贷问题及经济诉讼中则用到整数四则运算。西周盛行的占筮活动也促进了四则运算的发展。

第二节　数量与运算

1. 数字形体之演变。西周金文中的数字是由商代甲骨文演变来的，而字形更接近现代文字。下面是西周前期金文中的1～10十个数字[③]：

一　二　三　亖　X　介　十　八　九　丨

(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)　(7)(8)　(9)(10)

显然，一、二、三、四、五、七、十都与甲骨文相同，六、九已接近现代文体，八字则与现代基本一样了。到西周中、后期，“亖”演化成“四”或“ⅢD”，“丨”演化成“十”。东周时期，“九”进一步演化为“九”，“十”则演化为“十”。例如，相邦吕戈铭文

① 两周金文辞大系. 第101页。据郭沫若考证，该盘为夷王时器。虢（gū），姓。

② 徐中舒. 殷周金文集录. 成都：四川人民出版社，1984. 573

③ 本书中的金文原形，均依据《殷周金文集录》。

中的四写作“[illegible]”，曾子游鼎铭文中的四写作“[illegible]”。九在曾子原□簠[1]上写为“[illegible]”，十在曾伯从宠鼎上写为“[illegible]”。20世纪70年代在河北平山县出土的一些东周铜器上，则把十写作“[illegible]”，铜勺、铜钺和铜帐架的铭文中都有此字。

西周陶文中的数字与金文相近。例如，陕西武功郑家坡、周原岐山凤雏村、扶风召陈和长安张家坡等遗址中出土的西周陶文，大部分属于记数文字，计有

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(10)	(20)

金文中的20，30，40，50用合文表示，20为“[illegible]”，30为“[illegible]”，40为“[illegible]”，50为“[illegible]”。50以上的10的倍数就分开写了，如60写作“[illegible]”，80写作“[illegible]”。后来，“[illegible]”变化为“[illegible]”，如湖北随县曾侯乙墓出土的磬匣上，41写作“[illegible]”[2]，即以“[illegible]”表示40。

金文中的“百”一般写作“[illegible]”，东周时也有写成“全”的，200写作“[illegible]”，300写作“[illegible]”，500写作“[illegible]”，都是合文。600，700，800，900是分开写的，如600写作“[illegible]”。

数字合文亦见于西周的甲骨文。例如岐山凤雏村周原遗址出土的卜用甲骨中，50写作“[illegible]”，500写作“[illegible]”[3]。

金文中的千写作“[illegible]”，千的倍数不用合文，如3000写作“[illegible]”。万的写法有一个演变过程，西周初写作“[illegible]”，与甲骨文较接近，如卫盉[4]、十三年瘐壶中的万字，都是这种形状。后来则演变成“[illegible]”，西周中、后期大部分铭文中的万字都是此形，如

---

① 簠（fǔ），青铜食器，盛稻粱用。

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．25

③ 陈全方．周原与周文化．上海：上海人民出版社，1988．125

④ 盉（hé），青铜酒器。

公臣簋[1]铭、伯车父盨[2]铭、南宫柳鼎铭等。也有写作其他形状的，如五祀卫鼎铭写作“　”，虢叔簠铭写作“　”，师痪（yùn）簋铭写作“　”。在金文数字中，万字出现次数最多，形状也最丰富多彩。

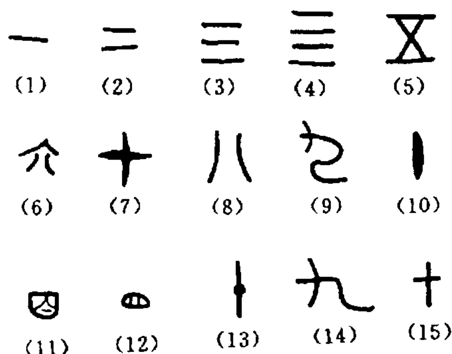


图 2·3·1

2. 记数法。西周数学继承了商代的十进制，记数方法趋于完善。这首先表现在大数记法上。甲骨文中虽已出现“　”（三万）这样的大数，但是个单字，显然是大约之数。而西周金文中已有了对大数的精确记载。例如周康王时，盂曾受命征伐北方的鬼方族，获胜后铸小盂鼎以作纪念，铭曰：“伐鬼方……，孚（俘）万三千八十一人。”[3] 这说明在社会生活中，人们已产生了对数学精确化的初步要求。现在看来，记数是十分简单的事。但在 3000 年前出现 5 位数，却是了不起的。并不是所有民族都能数好数，直到现代，有的原始部落的语言中只有一、二、三，大于三的数都

① 簋（guì），通毁，青铜食器。

② 盨（xǔ），青铜食器。

③ 两周金文辞大系．第 35 页。

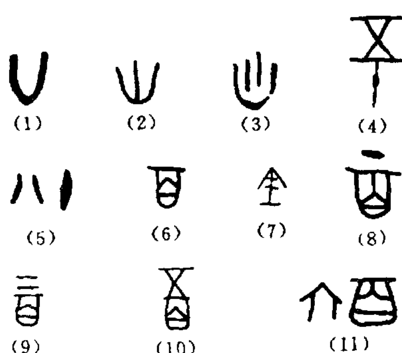


图 2・3・2

叫“多”。民国时期，我国有的少数民族也只能数到十。

现查西周金文中的大数单位，除万以外还有亿和秭。按当时进位制，十万为亿。不过金文中的亿字只是泛指大数，如师旦鼎铭：“子子孙孙其万亿年永宝用享。”[①]《逸周书》中则出现了大至亿的准确记载，如：“武王遂征四方……俘人三亿万有二百三十”[②]，即俘人 310 230。至于亿和秭的关系，我们还不清楚。后世称：“十亿为兆，十兆为京，十京为垓，十垓为秭。”这里“秭”之含义大概与周人的理解不同，因为据曶鼎铭文所载：“昔馑岁，匡众氒臣二十夫寇曶禾十秭。”[③]不可能设想一个奴隶主拥有如此之多的禾。

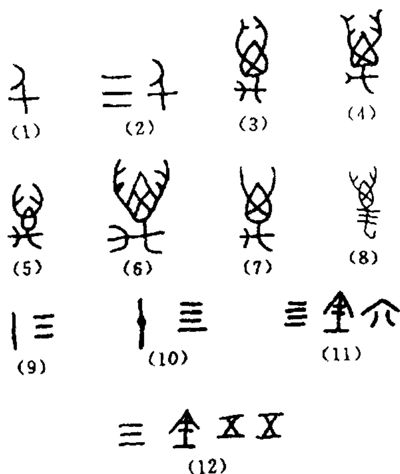


图 2・3・3

周金文记多位数时，常在不同位数间加“又”字，如大

① 两周金文辞大系．第 29 页。

② （晋）孙晁注．逸周书．中华书局，1936．34

③ 两周金文辞大系．第 82 页。曶，hū．曶鼎制作者。氒，jué、之。据鼎上铭文，知匡季抢劫了曶的十秭禾，因此引起诉讼。结果曶胜诉，匡季除被勒令赔偿外，还受到经济处罚。

盂鼎铭："赐汝……人鬲自驭至于庶人六百又五十又九夫。"[①] 师汤父鼎铭"十又二月"，[②] 多友鼎铭"执讯二十又三人"，"折首百又十又五人"，[③] 子仲姜镈铭"侯氏锡（赐）之邑二百又九十又九邑"[④]，叔夷钟铭："余赐汝车马戎兵厘仆三百又五十家"[⑤] 等。也有不加"又"的，上面所提"万三千八十一"便是一例，小圆壶中的 13 写作"丨≡"[⑥]，钺铭中的 14 写作"十≡"[⑦]，双翼神兽铭中的 14 写作"十≡"[⑧]，某铜壶上的 406 写作"≡[illegible]"[⑨]，都是不加"又"的例子。这两种书写方式交叉出现于西周和东周的铭文中，看来是并存的，看不出由一种演变为另一种的迹象。直到汉代，才舍弃了用又字隔开各位数的作法。

金文中的数字除了作为卦符外，一般是不单独用的，总和实物或时间单位连在一起。西周多是"先物后数"，如䵼侯鼎铭："王（周王）亲赐骏方玉五瑴（jué），马四匹，矢五束"，[⑩] 效卣铭："王赐公贝五十朋"，[⑪] 等等。间或有"物——数——物"的记法，如小盂鼎铭记载着盂出征的战绩："俘牛三百五十五牛，羊二十八羊。"[⑫] 东周才演化成"先数后物"，如洹（huán）子孟姜壶铭："两壶八鼎"。[⑬] 但"先物后数"的记法也同时存在。至于数字与时间单位连用，则无论西周或东周，总是把数字放在时间单位前面，这与现代是一致的，如三月、六年、万年等。

---

① 两周金文辞大系. 第 33 页。铭文记载的是周康王对盂的赐予。鬲，lì，西周对俘虏或奴隶的称谓，也称人鬲。

②④ 均引自两周金文辞大系。

③⑥⑦⑧⑨ 均引自殷周金文集录。

⑤ 两周金文辞大系. 第 243 页。铭文记载的是齐灵公对叔夷的赐予。

⑩ 两周金文辞大系. 第 104 页。

⑪ 两周金文辞大系. 第 88 页。卣（yǒu），青铜酒器。

⑫ 两周金文辞大系. 第 35 页。

⑬ 两周金文辞大系. 第 254 页。

周人除了用数词表示准确的数量外，某些特定的数词还用来表示约数，有“若干”、“很多”之意。从金文及《诗经》等西周文献看，周人用来表示较小约数的是三和四这两个词，而表示大数的主要是百、万二词。例如：

晋姜鼎铭：“保其子孙，三寿是勅。”①

《诗经·国风·硕鼠》：“三岁贯汝，莫我肯顾。”

秦公镈铭：“（祝秦公）眉寿无疆，抚有四方。”②

王孙诰编钟（春秋时物）铭：“余（即王孙诰自己）不畏不差，惠于政德……肃哲壮武，闻于四国。”③

南宫乎钟铭：“天子（指周王）其万年眉寿，畯永保四方，配皇天。”④

师毁（huì）毁铭：“（师龢父曰）师毁……嗣我西偏东偏，仆驭百工牧臣妾。”⑤

《诗经·小雅·鸿雁》（这是一首写人民服劳役的诗）：“之子于垣，百堵皆作。”

《诗经·小雅·都人士》（这是一首周大夫缅怀旧日都邑人物的诗）：“行归于周，万民所望。”

另外，千和亿也间或用来表示“很多”之意。有时候，几个不同等级的数词连用，不仅起到表示大数的作用，而且加强了人的感情色彩。如翏生随周王东征获胜，作铜盨以为纪念，铭曰：“其百男百女千孙，其万年眉寿永宝用。”⑥句中的数词便是这种用法。再如《诗经·小雅·甫田》（这是一首祈年、祭神的诗）：“乃

① 两周金文辞大系．第266页。

② 殷周金文集录．第261页。

③ 殷周金文集录．第69页。

④ 殷周金文集录．第232页。畯，古允字。

⑤ 两周金文辞大系．第111页。西偏东偏．军制名。

⑥ 殷周金文集录．第572页。

求千斯仓，乃求万斯箱"，《诗经·小雅·楚茨》（这是一首祈福诗）："永赐尔极，时（是）万时（是）亿"，《诗经·大雅·假乐》（这是一首颂扬周王的诗）："千禄百福，子孙千亿"，等等。有趣的是，表示较小约数的四有时与大数连用，其意义竟与"万"不相上下。如《诗经·大雅·崧高》："揉[1] 此万邦，闻于四国。"这里的万邦与四国，都是指许多国家，含义是一样的。

这种用特定数词表示约数的方法，对后世深有影响。直到今天，我们的语言中还不乏其例，如三思而行、四海为家、百花齐放、千里迢迢、万众一心等等。

周代记数法与商代相比，有一个明显的进步，就是出现了位值记数。如 20 世纪 70 年代出土的一个中山国铜灯铭文中，355 记作"≡全XX"[2]，末位的"X"表示个位五，而前一个"X"则表示 50，两个五间没有用十隔开。这说明当时已有了位值的观念，只是应用不多，尚未形成位值制。

战国时期的金文中，还出现了分数记载，如商鞅量铭："冬十二月乙酉，大良造鞅，爰积十六尊（寸）五分尊之一为升"。[3] 铭文的意思是以 $16\frac{1}{5}$ 立方寸为一升。这是数域在度量中扩大之实例。

3. 计量单位与度量衡。数与量是不可分的。为了表示各种物体的数量，就需要不同的单位名称。从金文来看，周代已具备了相当多的单位名称，有的一直沿用至今。现择要列举如下：

（1）卣——酒之单位。

（2）朋——货币单位，若干贝为一朋。

（3）匹——马之单位。

---

① 揉，使顺服。

② 殷周金文集录. 第 395 页。

③ 两周金文辞大系. 第 275 页。

（4）束——矢之单位，一百矢为一束。

（5）品——玉之单位。

（6）瑴——玉之单位。

（7）夫——犹“个”，特指男性奴仆。

（8）白（伯）——犹“个”，特指奴隶中的长者或地位较高者。

（9）枚——犹“件”，玉器单位。

（10）田——土地面积单位。金文中的田字是象形字，写作“田”[①]，可知当时是用沟坎把土地分成若干块来耕种的。据黄然伟考证，一田约为今 31.2 亩[②]。

（11）里——土地面积单位。

（12）邑——土地面积单位，同“里”。

（13）畮——古“亩”字，土地面积单位。

（14）两——重量单位。

（15）钧——金属重量单位。

（16）寽——重量单位。

这些单位名称中，有相当大一部分是与周代度量衡有关的，如里、田、邑、畮、两、钧等。据史料记载，周建国后不久，便对度量衡有所厘定，只是未闻其详。从金文中这些单位名称来看，周代许多器物数量已有定称，其度量衡确实比商有了明显进步。不仅如此，周人还有了明确的“方里”、“方尺”概念，如西周召圜器铭：“（周王赐召）毕土方五十里”[③]，土地面积以平方里计，大概以此为最早之记录。《逸周书》中的“郛方七十里”[④]，也是以平方里计算面积的例证，而“明堂方百一十二尺”[⑤]则是以平方尺计

---

① 殷周金文集录. 第 103 页。

② 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 第 211

③ 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 第 211

④ 逸周书. 第 40 页。郛，fú，外城。

⑤ 逸周书. 带 57 页。

算房屋面积。

4. 四则运算。整数四则运算产生于何时，尚无定论。但至今未在甲骨文中发现有关运算的记载，西周中期曶鼎铭文，是我们所知最早的记载运算的文字。铭曰："（曶）以匡季告东宫。……东宫乃曰：'偿曶禾十秭，遗十秭为二十秭。来岁弗偿则倍四十秭。'"[①]这是东宫对曶与匡季经济纠纷的判决，大意是要匡季赔偿曶庄稼 10 秭，并白送给他 10 秭，共为 20 秭。若第二年不偿还，就要增加到原来的两倍，即 40 秭。这实际上已包含加和乘两种运算：$10+10=20$，$20\times2=40$。《逸周书》记载：周武王时"辟开修道，五里有郊，十里有井，二十里有舍。"[②] 从其中五、十、二十的排列来看，显然用到了乘法。《逸周书·武顺解》中还有乘法口诀的记载，如"五五二十五"[③]，可见当时已能比较熟练地进行整数乘法运算了。战国墓葬中出土的砝码重量成等比数列，相当于 2^0，2^1，2^2，2^3…。《管子》一书中有"先主一，而四之三开，以合九九"的记载，相当于 $1\times3^4=9\times9=81$。

另外，从西周筮法分析，当时已有减法与除法运算。这个问题将在第三节具体讨论。

5. 周人对"万"字的崇拜。综观周代金文，万字出现之多十分惊人，大大超过了其他数词。据统计，郭沫若先生在《两周金文辞大系》中列举的 137 件西周有铭铜器中，出现"万"字的竟有 69 件之多。这些"万"字，大多是原义的引申，是表示人们愿望的吉祥之字。例如：

师奎父鼎铭："师奎父其万年子子孙孙永宝用。"

---

① 两周金文辞大系. 第 82 页。

② 逸周书. 第 32 页。

③ 逸周书. 第 27 页。

免觶[①] 铭:“免其万年永宝用。”

虢季子白盘铭:“子子孙孙万年无疆。”

伊毁铭:“伊其万年无疆,子子孙孙永宝用。”

大克鼎铭:“克其万年无疆,子子孙孙永宝用。”

无惠鼎铭:“眉寿万年,子孙永宝用。”

总之,周人在铸铜器以作纪念时,往往要铸上“万年无疆”、“万年永宝用”之类的字样,这已成为西周铭文的套语,可见周人对“万”字崇拜之深。这种现象在《诗经》中也很普遍,例如《诗经·小雅·甫田》:“报以介福,万寿无疆”,《诗经·小雅·瞻彼洛矣》:(诸侯称颂周王)“君子万年,保其家邦”,《诗经·大雅·下武》:“(武王)爰天之佑,四方来贺。于斯万年,不遐有佐”,等等。实际上,西周遗风绵延几千年,至今不绝。“万岁”、“万寿无疆”等语,以及民间的“万福”、“万事如意”等,都源于我们祖先对“万”字的崇拜。

第三节 历法与占筮

1. 历法中的数学。殷人以干支纪日,即用十天干与十二地支相组合,共得60个不同单位——从甲子开始,以癸亥告终。然后又是甲子,如此循环不断。自武丁之后,殷人分为新旧二派,旧派的干支纪日与年月之间无关联,而新派则将干支系于月名之内,如“才(在)六月,甲午”,[②] 即六月内甲午这一日。殷代历法为阴阳合历,即月为太阴月,而年为太阳年。这样,一年为十二月有余,故有置闰月之法。旧派采取年终置闰,故有十三月之称。新

① 觶(zhi),青铜器,饮酒用。

② 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局,1978. 27

派则置闰于当闰之月[①]，如二月有闰，则在二月后加一闰月，仍以二月名之，然后才是三月，故年底均为十二月。此外，新派不称第一月为一月而称正月。周文化是从商文化继承来的，故历法与商代有密切关系，同时又有自己的特征。

西周纪年，采取王后加年的办法，如“隹（帷）王元年”[②]，即某王即位的第一年；“隹王十又二年”[③] 即某王即位后 12 年。但常常省略王字，如克壶铭：“隹十又六年七月，既生霸，乙未，伯大师赐伯克仆三十夫”[④]，师觞（yú）毁铭：“隹三年三月，初吉，甲戌，王在周师录宫”[⑤] 等等。在少数铭文中，称年为祀，这是沿袭商代称谓[⑥]。如师遽毁铭：“隹王三祀四月，既生霸，辛酉，王在周客新宫”[⑦]，其中“三祀”即三年。

周人纪月，沿用商代新派方法，称一月为正月，月之序数由正月、二月……到十二月为止，并兼以十二地支表示。周初的少数铭文中有十三月之称，如南宫中鼎铭：“隹十又三月庚寅，王在寒次。”[⑧] 但西周中期以后，就不再有十三月的记载了，可见商代新派的闰法完全取代了旧派闰法。但西周的月份比商代提前了一个月，商以建丑之月为正月，周人则以建子之月为正月。（见下表）

---

① 所谓当闰之月，是指不含中气之月，见：徐振韬．日历漫谈．北京：科学出版社，1978

② 两周金文辞大系．第 96 页。在金文中，“隹王”即“当今的王”。

③ 两周金文辞大系．第 72 页。

④ 两周金文辞大系．第 108 页。

⑤ 两周金文辞大系．第 115 页。

⑥ 甲骨文中的“祀”原为祭祀意，因帝乙、帝辛时遍祭其先祖须时约一年，故借此字为“年”，沿用至西周。东周时，祀字又恢复祭祀本意。

⑦ 两周金文辞大系．第 78 页。

⑧ 两周金文辞大系．第 20 页。

	殷正	周正
	建丑	建子
丑	正月	二月
寅	二月	三月
卯	三月	四月
辰	四月	五月
巳	五月	六月
午	六月	七月
未	七月	八月
申	八月	九月
酉	九月	十月
戌	十月	十一月
亥	十一月	十二月
子	十二月	正月

周历与商历的最大区别，是采取了一月四分法，与今之“星期”类似。这种分法是以月相为标准的。西周金文中共有四个月相名称——初吉，既生霸，既望，既死霸，相当于今之朔，上弦月，望，下弦月。周人以月初为吉，故有初吉之名。至于月相中的霸字，按东汉许慎（30～124）、马融（79～166）的解释，即“月之光”[1]。从上弦月以后，月虽未满而光生已久，故称“既生霸”；下弦月以后，月虽未晦而始生之明已死，因为在地球上的人看来，月无光之处正是月初有光之处，故称“既死霸”。王国维说：“古者（指周代）盖分一月之日为四分。一曰初吉，谓自一至七、八日也；二曰既生霸，谓自八、九日以降至十四、五日也；三曰既望，谓十五、六日以后至二十二、三日也；四曰既死霸，谓自二十三日以后至于晦也。”[2] 这种说法是有道理的。

在世界科学史上，一月四分法曾在不同民族中产生。例如公元前2000年左右，巴比伦人就把一个朔望月分为四部分，成为后来“星期”的雏型。在当时条件下，中国文化是不可能受巴比伦文化影响的。不同民族有同样的发明，这充分体现了科学的内在规律性。

---

① 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 144

② 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 47

从西周金文来看，周人仍采用60干支纪日法，但把干支附属于月相之上。如师奎父鼎铭："隹六月，既生霸，庚寅"[①]，是说在六月的第二个"星期"，庚寅这一日。吕鼎铭："隹五月，既死霸，辰在壬戌"[②]，是说在五月的第四个"星期"，壬戌这一日。按这种纪日法，不仅知道月、日，还知道是一月的第几个"星期"。当然，周人并未明确规定间隔为七天的时间单位，所以不能把其一月四分法与今之星期等同，我们这里仅仅是借用这一名词来表示当时类似的时间单位。实际上，"星期"这一概念是近代才从国外传入的。西周的一月四分法并没有流传下来，到了东周，月相名称便逐渐在历法中消失，"初吉"一词则演变为吉祥用语，而失去月相本义了。

西周纪日之完整次序为：年（祀）→月名→月相名→干支日。下面略举几例：

无曩（ji）毁铭："隹十又三年正月，初吉，壬寅，王征南夷。"[③]

瘨盨铭："隹四年二月既生霸，戊戌，王在周师录宫各大室即位。"[④]

走毁铭："隹王十又二年三月既望，庚寅，王在周各大室即位。"[⑤]

颂鼎铭："隹三年五月既死霸，甲戌，王在周康邵宫。"[⑥]

考察金文纪日中的月相名，我们发现初吉之用最多，大约相当于既生霸、既望、既死霸的总和。在黄然伟收集的两周赏赐铭

---

① 两周金文辞大系．第70页。
② 两周金文辞大系．第49页。
③ 两周金文辞大系．第120页。
④ 殷周金文集录．第198页。
⑤ 两周金文辞大系．第72页。
⑥ 两周金文辞大系．第64页。

文中，初吉之用占55%，既生霸占22%，既望占15%，既死霸仅占8%。究其原因，在于当时诹日（即选择吉日）行事之风的盛行。周人以月初为吉，行事多在此间，故金文中初吉特多。另外，金文的干支纪日中以丁亥为最多，庚寅次之。这也是诹日之风使然。丁亥日为周人心目中的最吉善之日，故其赏赐、任命、祭祖、铸器、周王视察，以及进行各种庆典活动，多在丁亥日。如：

师旦鼎铭："隹元年八月丁亥，师旦受命。"①

吴彝铭："隹二月初吉丁亥，王在周成大室。"②

卯毁铭："隹王十又一月，既生霸，丁亥……燹伯呼令卯曰：'赐汝马十匹，牛十'。"③

虢季子白盘铭："隹十又二年正月，初吉丁亥，虢季子白作宝盘。"④

王子午鼎铭："隹正月初吉丁亥，王子午择其吉金（铸鼎）。"⑤

由于历法的需要，周代顺序数词比商更加丰富，这是数学的一个进步。周代实际有三套顺序数词。第一套是由商继承来的干支顺序数词。单用天干可表示第一到第十，单用地支可表示第一到第十二，用地支表示一年的十二个月是周人常用的方法。干支合起来则可表示第一到第六十，用它纪日相当方便，而且对两日的间隔是一目了然的，如庚午与庚辰相差十，甲子与丙子相差十二，等等。不过，西周的干支纪日还不连续。实际上，我国是从春秋时鲁隐公三年（公元前722年）二月起用干支连续纪日的，直到清末为止。周的第二套顺序数词是表示某年或某月的数词，这

---

① 两周金文辞大系．第29页。
② 两周金文辞大系．第62页。
③ 两周金文辞大系．第91页。
④ 两周金文辞大系．第101页。
⑤ 赵世纲，刘笑春．王子午鼎铭文试释．文物．1980（10）：27～30

是从基数词借用的。第三套是周代发明的“孟”、“仲”和“季”，分别相当于第一、第二、第三，这几个词广泛出现于东周金文中，用来表示时间顺序。如蔡侯钟铭：“五月初吉孟庚”[①]，其中“孟庚”二字即第一个庚日。（如该月包括庚寅、庚子、庚戌三日，则庚寅为该月之孟庚。）再如越王钟铭：“隹正月孟春吉日丁亥”[②]，其中“孟春”即春季的第一个月。而“仲夏之月”[③]则指夏季的第二个月。周分一年为四季，1～3月为春季，4～6月为夏季，7～9月为秋季，10～12月为冬季，与今之“季度”相同。金文中的孟、仲、季三个顺序数词常用来表示一季中的三个月。周代有明确的季节划分，这也是比商代进步的地方。

2. **独特的卦符**。《周易》中的八卦符号已为人们熟知了，但算卦活动要比《周易》的出现早得多。最初的卦符不是“—”（阳爻）和“--”（阴爻）这样的几何符号而是数字符号，例如山东平阳出土的一个商末陶罐上，就刻着由六个数字组成的卦符：“一八八六一一”[④]。陶罐是普通人家的日用品，卦符出现在这样的器物上，说明占筮活动在当时已很流行了。

周因商礼，周代卜筮活动在商的基础上有进一步的发展。《周礼》云：“凡国之大事，先筮而后卜。”卜即龟卜，与数学无关，故本书从略。筮是用蓍草或小竹棍来算卦，以预言吉凶。虽然占筮本身属迷信活动，但其中蕴含着丰富的数学内容。

西周的卦，是用3个或6个相连的数字表示的。3个数字组成的卦叫单卦，6个数字组成的卦叫重卦。甲骨文和金文中都有卦的记载。例如，周原甲骨文中有下列几组数字[⑤]：

---

① 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 36

② 黄然伟. 殷周青铜器赏赐铭文研究. 龙门书局，1978. 36

③ 逸周书. 第49页。

④ 张亚初，刘雨. 从商周八卦数字符号谈筮法的几个问题. 考古，1981（2）

⑤ 陈金方. 周原与周文化. 上海：上海人民出版社，1988. 145



分别表示"六六七""六六十"、"七六六"、"八七八七八五"、"七六六七六六"，其中前3个是单卦，后两个是重卦。再如西周史游父鼎铭："史游父作宝尊彝，贞七五八"[①]。贞即占卜，这里显然是特指占筮，因为卜的结果只见形状，不得数字[②]。"贞"字后的"七五八"便是占筮后得出的单卦。父戊卣上的铭文"六六六"和堇伯殷上的铭文"八五一"也是单卦，而召仲卣上的卦符"七五六六六七"则是重卦[⑤]。这些符号中的奇数代表阳爻，偶数代表阴爻，有三个数字的是三爻，六个数字的是六爻。在周代甲骨文中，曾发现由五个数字组成的"奇字"。



（六六七七六）



（七六六七六）

一些考古工作者认为也是卦爻的标记[③]。

值得注意的是，近年出土的西周陶器上，也发现了用数字表示的卦爻[④]，如



（一六六）



（八一六一七七）

周代有"筮不过三"的说法，即在做某事前，为了"可靠"地预言吉凶，占筮往往不止一次，但一般以三次为限。例如湖北麻城出土的西周初中方鼎铭文："隹十又三月庚寅……王曰：'中，兹

①⑤张亚初，刘雨. 从商周八卦数字符号谈筮法的几个问题. 考古，1981（2）：160

② 卜即用火灼龟背，根据灼开的裂纹形状来预言吉凶。

③ 张政烺. 试释周初青铜器铭文中的易卦. 考古学报. 1980（4）

陈金方. 周原与周文化. 上海：上海人民出版社. 146

④ 陈金方. 周原与周文化. 上海：上海人民出版社. 145

禑（ké）人入事，赐于武王作臣。今贶卑汝禑土，作乃采。中对王休令，𩰫父乙尊。隹臣尚中臣。七八六六六六，八七六六六六。”①铭文大意为：周王把禑这个地方赐给中作采邑，中为答扬周王的恩惠而作父乙尊。中希望禑臣永远为自己的臣，并为自己的前途占筮，一共占了两卦，把结果铸到鼎上。

那么，周人究竟是怎样进行占筮的呢？金文中不见记载。但我们可以根据史料作些推测。

据《周易》记载，占筮者摆好 50 根筮草，实际用 49 根。从这 49 根中抽出一根另放，然后把剩下的 48 根任意分为两堆，从每堆依次减去 4 根，直到每堆余数（即筮草根数）不大于 4 为止。把两堆余数加上 1（即开始单放的一根），其和设为 A。显然，A 等于 5 或 9。49 减去 A，会出现两种情况，一是余 44，一是余 40，这是第一次差。

然后把这 44 根或 40 根筮草，按上法演算，得第二次差——40，36 或 32。

最后把第二次差按上法演算，得第三次差——36，32，28 或 24。这四数分别除以 4，得 9，8，7，6，分别称为老阳、少阴、少阳、老阴。通过以上三次演算，便得到一“爻”。“爻”是八卦的基本符号，分阴阳二种，阳爻用一长划“—”表示，阴爻用二短划“--”表示，即 9，7 的卦符为“—”，8，6 的卦符为“--”。

西周的卦与《周易》所载不同，表示卦的数字不是“六、七、八、九”而是“一、五、六、七、八”。但后来的八卦无疑是由西周卦符演变而来的。根据西周卦符特点及后世的筮法，我们提出西周筮法假说如下：

取筮草 44 根，任意分为两堆，若两堆筮草根数恰等，则得到

① 贶，kuàng，赐与。𩰫，shāng，这里是制造的意思。尚，常，永远。

卦符 1。若两堆不等，则从每堆依次扣除 4 根，直到每堆余数不大于 4 为止。把两堆余数加起来，必为 4 或 8，从 44 中减去 4 或 8，得 40 或 36，我们称为第一次差。

把 40 或 36 根筮草按上法演算一遍（不必考虑两堆是否相等），得到第二次差——36，32 或 28。

最后把第二次差用同样方法演算，得第三次差——32，28、24 或 20。

用第三次差除以 4，有 4 个可能的结果——8，7，6 或 5。其结果便是卦符。

把上面的做法重复 3 遍，即得一单卦；重复 6 遍，即得一重卦。

在金文的一至十这 10 个数字中，四之应用最多。周人分一年为四季，分一月为四相（月相），称各国为“四周”，称各方为“四方”，等等。看来周人是乐于用“四”的，大概认为它比较吉利。再考虑到后世筮法与“四”关系密切，可见“西周人取筮草总数为双四，最后除数亦为四”的设想是比较合情理的。后来，筮草根数增加到 48，并舍弃卦符 1，于是结果就变为 6，7，8，9 了。至于取筮草 50 根及把其中一根另放，只不过是为了凑个整数和故弄玄虚，没什么实际意义。

虽然西周筮法尚无定论，但我们根据上述分析，至少可得以下结论：

第一，在西周，卦符通常用数字表示，而且是固定的一、五、六、七、八这 5 个数。

第二，从西周卦符来看，当时已有了减法和除法运算。否则就很难得到 5 个确定数字。

第三，后世的几何形卦符（即阳爻“—”和阴爻“--”）是由西周数字卦符演变而来的。

第四节　从青铜器看周代的几何知识

虽在金文中尚未发现几何知识的记载，但从青铜器及其上面花纹形状的分析，可知周人已掌握了相当丰富的几何知识。

首先，种类繁多的青铜器是有一定几何形状的，许多基本的几何图形在青铜器中都有反映。例如：

等边三角形　三足鼎是周代最常用的青铜器之一，不管是柱足，还是马蹄形足，三足都恰成一等边三角形的三个顶点。三足敦[①]、三足盉之足也是如此。

等腰三角形　三足匜[②]之三足恰成等腰三角形的三个顶点。

长方形　青铜器中的长方形特多，方鼎、方鬲[③]、方簋、方瓶、方彝、方觚等，其开口均为长方形。

圆　青铜器中的圆也很多。鼎、鬲、勺、尊[④]瓶、簋、甗[⑤]、敦、豆[⑥]、盉、卣、壶、觯等器物的开口，多呈圆形。

椭圆　壶和觯的开口，亦有呈椭圆形的，如饕餮纹壶[⑦]和齐史疑觯[⑧]。

梯形　一些方鼎的侧面呈梯形，如田告鼎[⑨]。

---

① 敦，青铜器，盛食物用。

② 匜（yí），青铜器，盛水用。

③ 鬲（lì），青铜器，烹煮用。

④ 尊，青铜器，盛酒用。

⑤ 甗（yǎn），青铜炊器。

⑥ 豆，青铜器，盛食物用。

⑦⑧ 容庚，张维持. 殷周青铜器通论. 北京：科学出版社，1958. 图版壹零柒、壹贰肆。

⑨ 容庚，张维持. 殷周青铜器通论. 北京：科学出版社，1958. 图版拾壹。

弓形　有些角[①] 的开口是两个相连的弓形，如宰梳角[②]。

圆柱　许多鼎的足呈圆柱形，被称为柱足鼎。有的鼎身也呈圆柱形。

球　不少敦做成球形，如蝠纹敦[③]、陈侯午敦[④]。

棱柱　一些方鼎呈四棱柱形，如作册大方鼎[⑤]。

圆台　右里启盌[⑥] 及两头兽纹甗[⑦] 均呈圆台形。

拟台体　一些方鼎的开口及底为长方形，四个侧面呈梯形，整个鼎身与四棱台近似，可称拟台体，如田告鼎。（这种拟台体，后来被称为"刍童"。）

周代青铜器上的许多花纹，也具有规则的几何形状，或是从几何图形演变而来。几何知识同美术的巧妙结合，充分显示了古代劳动人民的智慧。据初步统计，青铜器上的几何纹样有以下 8 种：[⑧]：

1. 云纹　云纹是殷周青铜器装饰纹样中的一大类别，是以连续螺旋形构成的。图 2・3・4 是其中的一种。

2. 雷纹　从圆形云纹变为一种有方角的形式，称为雷纹。这也是青铜器花纹中常见的一类，见图 2・3・5。

3. 圆圈纹　青铜器中，常见许多小圆圈整齐地排列成一行或两行，形成简朴而美观的圆圈纹。其中有的有圆心，如鸟形罐上

---

① 角，青铜器，煮酒用。

② 容庚，张维持．殷周青铜器通论．北京：科学出版社，1958．图版伍叁。梳，hāo。

③④容庚，张维持．殷周青铜器通论．北京：科学出版社，1958．图版肆壹。

⑤ 容庚，张维持．殷周青铜器通论．北京：科学出版社，1958．图版拾贰。

⑥ 容庚，张维持．殷周青铜器通论．北京：科学出版社，1958．图版壹肆陆。盌，挹水器。

⑦ 容庚，张维持．殷周青铜器通论．北京：科学出版社，1958．图版拾玖。

⑧ 这些纹样均取自容庚、张维持著《殷周青铜器通论》。

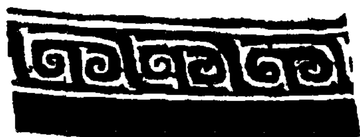


图 2·3·4　云纹

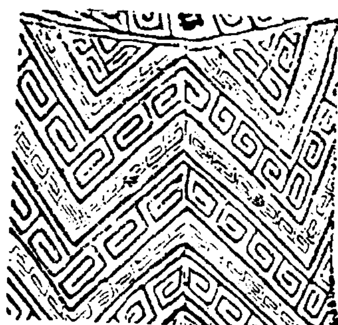


图 2·3·5　雷纹

的花纹（图 2·3·6）；有的不画圆心，如某簋上的花纹（图 2·3·7）。

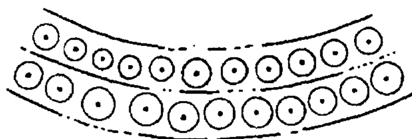


图 2·3·6　圆圈纹（1）



图 2·3·7　圆圈纹（2）

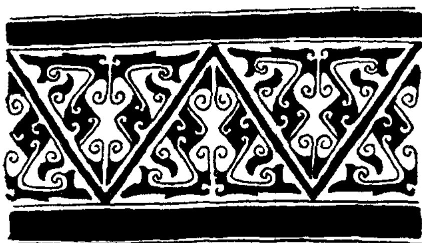


图 2·3·8　三角纹

4. 三角形纹　三角形，特别是等边三角形被饰于青铜器，更为青铜器增添了色彩。这种纹样很少单独出现在铜器上，多于三角形内配以其他花纹，如斜方云纹区①（图 2·3·8）。

5. 方形纹　规则的正方形或长方形花纹很少见，但青铜器花纹中有不少属于变化了的方形，如鄂侯簋（图 2·3·9）。

6. 菱形纹　青铜器中有若干相连菱形构成的花纹，如斜方格雷纹无耳簋（图 2·3·10）。

① 区，青铜器，盛酒用。

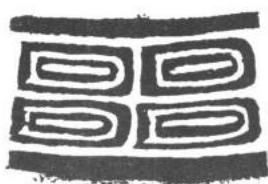


图 2·3·9 方形纹

7. 波纹 波纹实际是由三角形变化而来的，把交角改为弧形即成波纹，如环带纹簠（图2·3·11）。

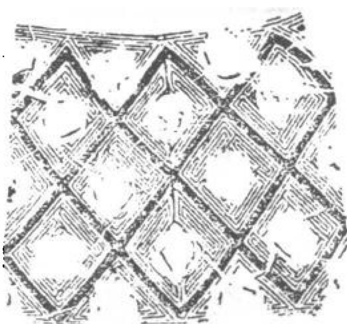


图 2·3·10 菱云纹

8. 绳纹 这是两条或两条以上的波线扭结而成的，如四兽纹壶。

很明显，周人虽然尚未对几何图形进行系统总结和分类，但他们已初步认识了三角形、长方形、梯形、菱形、弓形、圆、椭圆、柱、球、台等基本几何形体，这些几何知识的积累同算术一样，是形成初等数学体系的必要条件。



图 2·3·11 波纹

第四章　先秦古籍中的数学思想

秦朝统一中国之前，在春秋战国的500多年间，学术思想十分活跃，出现了百家争鸣的黄金时代。儒道名墨各学派的哲学和自然观虽各有千秋，但对早期数学思想的发展，从不同角度、程度不同地起到了促进作用。中国古代先哲们对数学的认识散见于诸子百家的典籍里，有的论说较为集中。本章概述《周易》、《论语》、《墨经》等先秦古籍中的数学内容，结合探讨一些在文化史上有重大影响的课题如河洛、八卦等，由于原著简奥，后人多所诠释，所以本章内容的展开，不可避免地引述了不同时期的注解，也不可能引用过多，这是需要说明的。

第一节　《周易》中的数学思想

1.《周易》简介

《周易》又称《易经》，是我国最古老的一部占筮用书，它的内容素以深奥难解著称。《周易》记录了我们的祖先观察各种客观事物所作出的兆象及吉凶判断，反映了古人在同自然界的密切联系和社会的矛盾斗争中，由于不能掌握其发展变化的规律而求助于神学预示的愿望和信仰；同时也直接或曲折地反映了他们对客观事物的观察和认识，记载了他们实践活动的经验、感受和评价，表现了他们对周围世界进行概括或抽象的愿望，其中也包含了一些早期的唯物主义和初步的辩证观点。所以，《周易》便成为中国哲学史和科学史上第一部经典著作，其地位在封建社会居于六经（易、诗、书、礼、乐、春秋）之首，同时又是术数龟蓍杂占的开

山之作。

《周易》的起源有多种解释，一说夏、商、周曾三易其名，分别叫《连山》、《归藏》和《周易》。关于“易”的含义，据东汉郑玄的注解，易有三义，即简易、变易和不易。

《周易》分《易经》和《易传》两部分。《易经》由卦图、卦辞和爻辞构成，共有六十四卦，每卦有一个卦图、一条卦辞和六条爻辞。《易传》共有七种，即彖传、象传、文言、系辞、说卦、序卦、杂卦，是对《易经》的注解。由于它的历史也很古老，传统上把它看作《周易》的一部分。

《周易》经文从乾☰、坎☵、艮☶、震☳、巽☴、离☲、坤☷、兑☱八卦两两排列演成六十四卦，三百八十四爻，用以预卜吉凶休咎。“爻”，交错变动的意思，《系辞传》说：

“爻也者，言乎变者也”，又说“爻也者，效天下之动者也”。爻有阴阳之分，近世章太炎、郭沫若认为阳爻⚊象征男根，阴爻⚋象征女阴，“由此而演出男女，父母，阴阳，刚柔，天地的观念”。[①] 上述八卦，依次象征天、地、雷、风、水、火、山、泽，当然每一卦所象征的内容也不是单一的。演成的六十四卦也各有象征意义，如第47卦的卦图是䷮，象水的坎☵在象泽的兑☱之下，它的卦名是“困”。后面有卦辞。解说爻象的一句话是这样的：“象曰：泽无水，困，君子以致命遂志。”魏王弼（226～249）注：“泽无水，则水在泽下；水在泽下，困之象也。处困而屈，其志忘，小人也。君子固穷，道可忘乎？”经文对“困”举出几种情况，并预言了凶吉。这条是说，水在泽下，泽中无水，水草枯干，鱼虾死亡，处于困境，所以卦名为困。引申意义是君子临于困难境地，要舍弃生命以行其志愿。像这样，六十四卦排列了许多情况，并逐一解说，预卜吉凶。对古代社会来说，用六十四卦乃至三百八

① 郭沫若. 中国古代社会研究. 开明书店. 27

十六爻来概括各类事件的利害关系，反映了当时人们在自然与社会活动中的范围尺度与所关心的问题。

《周易》何时成书，众说纷纭，不能确切认定，但它是在一个较长的时期里逐步形成的，是普遍的看法。大体说来，它的成书可分为三个历史阶段：

甲、《系辞传》说："古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。"包牺就是伏羲，所以有伏羲重卦说（孔颖达）。相传伏羲为古帝三皇之一，姓风，建都于陈（今河南开封东）。另一位古帝神农，也被认为是八卦的发明者，有神农重卦说（郑玄）和夏禹重卦说（孙盛）。这些说法把八卦的产生与古代圣贤联系起来，说明《易经》的起源可以追溯到上古原始部落时期。

乙、司马迁在《史记·周本纪》中说："崇侯虎潜西伯（季历子昌，即以后所称的周文王）于殷纣，纣乃囚西伯于羑里（羑即牖，今河南汤阴北有牖城）"，"文王其囚羑里，盖益易之八卦为六十四卦。"又《史记·日者传》称："司马季主曰，文王演为六十四爻"。历史上通常称此事为"文王演周易"或"文王重卦"，在考古学和古文字学方面也得到了证明。司马迁的这一记载源于《荀子》。综上，《易经》不是一人一时的作品，而是在漫长的历史年代里形成的，其中保存有殷周占卜记录，集中了筮人的活动结果，它的编纂大约在西周后期。

丙、《易传》七种汉人认为是孔子所作，因为它引孔子语录29条，均记有"子曰"字样，也有人因此认为它实出于孔子弟子手笔。不少意见认为《易传》在战国时代成书，亦非出自一人之手。

从思想史和科学史的角度来看，《周易》的内容十分丰富，它既含有哲学、文学、政治、历史、社会学、道德、法律、逻辑、音律、军事等社会科学的内容，也含有天文、数学、医理、生物等

自然科学的内容。因而，它对中国哲学和科学思想的发展产生了最为重大的影响。儒道名墨等先秦诸子或多或少地从《周易》中汲取过营养；直到现代，在思想界和科学界的某些方面，还可以找到《周易》哲理影响的若干痕迹。

在我国历史上，对《周易》的研究阐发形成了历时2000多年的易学学派，著作之多，可谓汗牛充栋，今有传本的约3000余种。许多哲学家、科学家都要读易，易的精神渗透到包括数学书在内的许多著作之中，不同的学派之争，有时就以说易或解易的形式而展开。可以说，要讲清楚《周易》在科学史中的价值，决不是三五本书所能完成的。对本节而言，将把注意力集中在它的自然观对早期数学思想发展的影响。具体内容主要讨论河图洛书、八卦数学、揲蓍方法和太极数学几个方面。

2. 河图洛书

《周易·系辞传》称："是故天生神物，圣人则之；天地变化，圣人效之；天垂象，见吉凶，圣人象之；河出图，洛出书，圣人则之。"这是经书中关于河图洛书的最早记载，河洛并提，暗示两者同属天生神物，其兆象可以预示天地变化和吉凶利害，成为圣人治世的准则。但《周易》中并未解释什么是河图洛书，于是后世学者纷纷著书立说，形成延续2000多年的河洛之学，在中国文化史上为一大专题。

河洛并提的典籍有：《春秋纬》"河以通乾出天苞，洛以流坤吐地符，河龙图发，洛龟书感，河图有九篇，洛书有六篇也。"这里的乾坤九六之说，与八卦相关，下面还要解释。

《周髀》称："数之法出于圆方"，《周髀经解》注："河图者，方之象也；洛书者，圆之象也；太极者，圆之体，奇也；四象者，方之体，偶也。"这里的河方洛圆之说，以后改成河圆洛方，尚有河洛可方可圆的理论。

东汉班固在《白虎通义》封禅中写道："德至渊泉，则黄龙现、

醴泉通，河出龙图，洛出龟书，江出大贝，海出明珠。”他认为只要圣德所及，河图洛书就可以出现，如同大贝明珠一般，似乎并非只有一次的事件。

单独提到河图的先秦古籍有《论语》、《墨子》、《尸子》等。《论语·子罕》中孔子说：“凤鸟不至，河不出图，吾已矣夫！”显然他曾希望有生之年能见到河出图的吉祥之兆，说明他心目中河出图不是仅有一次的事件。

《墨子·非攻》称：“赤鸟衔珪，降周之岐社，曰：天命周文王，伐殷有国，秦颠来宾，河出绿图，地出乘黄。”墨子认为河图是绿色的，并指出接受天命的圣人是周文王。但在《尸子》卷末记载却与此不同：“禹理洪水，观于河，见白面长人鱼身出曰：吾河精也，授禹河图而还于渊中。”这个想象丰富的故事虽然离奇，但禹受河图的传说后来还是占了上风。

《尚书》，即上代以来之书（分古文尚书和今文尚书，另外还有伪作），相传由孔子编成，实际西汉初仅存今文尚书28篇，后来儒家又补充进去一部分。在《顾命》篇中，记载周成王“乙丑王崩”，灵堂里沿东墙陈列着“大玉、夷玉、天球、河图”。《顾命传》解释说：“河图，八卦；伏羲王天下，龙马出河，遂则其文以画八卦，谓之河图。”

此外，《礼运·疏》引《中候握河纪》称：“尧时受河图，龙衔赤文，绿色。”《史记》和《汉书》中也都有关于河图的记载。

单独提到洛书的史籍较少，但对什么是洛书的解释却较多，如洛书即九宫说、洛书即洪范九畴说等。

河图、洛书可能与纵横图有关系，但有何种关系目前尚不清楚。前已述及甲骨卜辞也许是纵横图的起源，不过由甲骨卜辞到纵横图的过渡还要进行探讨。

3. 八卦数学

《汉书·律历志》说：“自伏羲画八卦，由数起。”卦爻符号与

数学符号并非无关。据《周书》武顺解："人有中曰参，无中曰两，……男生而成三，女生而成两，五以成室，室成以生民。"谭戒甫认为："故卦爻之耦，以'--'表之，而奇爻之'—'，疑其初态本应作'---'，方能适合于'参'。……由是三两合五（☱），以成室而生民。正《系辞传》所谓'男女构精，万物化生'者矣。"[1] 乾☰的原形是九'☰'，坤☷原是六，九六之说本此。所以乾卦的三爻顺次叫初九、九二、九三，坤卦的三爻顺次叫初六、六二、六三。进而视"—"等于九，"--"等于六，以后重卦的数学变化，即建立在这种九六说的基础之上。

《系辞传》说："易有太极，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦。"太极是什么，有十分复杂的哲学含义，可用数学中的"一"来对应。一生为二，二生为四，……即 2^0，2^1，2^2，…，可以叫做"太极级数"。两仪，即阳阴两爻"—"和"--"；四象，即老阳"⚌"，少阳"⚎"，老阴"⚏"，少阴"⚍"。玄学解四象，越讲越玄，共有九说。从数学上讲，从两类符号集合中任取两个的有重复排列只有 4 种：$2^2=4$，如此而已。同理，任取三个的有重排列只有 8 种：$2^3=8$，这就是八卦了：

乾☰　坤☷　$9\times3+6\times3=45=9\times5$

震☳　巽☴　$6\times2+9+9\times2+6=45$

坎☵　离☲　$6\times2+9+9\times2+6=45$

艮☶　兑☱　$6\times2+9+9\times2+6=45$

前 4 个为阳卦，后 4 个为阴卦。《系辞下》说："阳卦奇，阴卦偶"，从算式中也可以看出。在数学神秘主义的古代，九和五各有非同寻常的含义，所以 45 也就成了神数，洛书中一至九的和不也是 45 吗！每卦三爻的顺序是从下向上，震、巽为长男、女（看第一爻），坎、离为中男、女（看第二爻），艮、兑为少男、女（看第

---

① 谭戒甫．周易卦爻新论．武汉大学文哲季刊五卷二号．290～291

三爻），加上乾、坤为老父、母，显然是一个大家庭了！

八卦有方位，是古代中国的坐标系，沿用几千年。《说卦》称："震，东方也；……巽，东南也；……离也者南方之卦也；……乾，西北之卦也；……坎者水也，正北方之卦也；……艮，东北之卦也"。原文只说兑卦为"正秋也"，坤卦却不著一辞，或许是遗漏。补全的八卦方位如图所示。东西南北和现行西方地图的规定恰恰相反。通常见到的八卦图（图2・4・1），数字和虚线是临时标上的。注意到每相邻两"象限"之和均为90①，八卦总和180。我们知道，组合数学十分重视数字配置的均衡性，在一定约束条件下达到这种均衡往往需要较高的技巧。八卦图同洛书数一样，巧妙的配置方法令人赞叹。有人认为，它原是一种数学游戏图①，其他的含义只是后人逐步附会的。



图2・4・1　八卦图

将八卦看作八类元素集合，任取两元从下到上排列起来，便得到六十四卦——即所谓"重卦"。$8^2=64$。虽然从阴阳两爻的两类中任取六元的有重排列 $2^6=64$ 也可以得到完全相同的结果，但按重卦的原意不应作后一解释。《说卦》称"八卦相错"，错即重迭，即"重卦"的由来。重卦总和360，与周天度数相合①，但我们尚不清楚两者之间的关系。

八卦和六十四卦的排列顺序在历史上有变化，本文只能选择一种来从数学上讨论。按照宋儒邵雍（1011～1077）的六十四卦序，可以与德国数学家莱布尼兹创立的二进制数字建立一一对应关系：

---

① 岑仲勉. 易卦爻表现着上古的数学知识. 中山大学学报，1956（1）：176～186

0	坤	000000	16	师	010000	32	复	100000	48	临	110000
1	剥	000001	17	蒙	010001	33	颐	100001	49	损	110001
2	比	000010	18	坎	010010	34	屯	100010	50	节	110010
3	观	000011	19	涣	010011	35	益	100011	51	中孚	110011
4	豫	000100	20	解	010100	36	震	100100	52	归妹	110100
5	晋	000101	21	未济	010101	37	噬嗑	100101	53	睽	110101
6	萃	000110	22	困	010110	38	随	100110	54	兑	110110
7	否	000111	23	讼	010111	39	无妄	100111	55	履	110111
8	谦	001000	24	升	011000	40	明夷	101000	56	泰	111000
9	艮	001001	25	蛊	011001	41	贲	101001	57	大畜	111001
10	蹇	001010	26	井	011010	42	既济	101010	58	需	111010
11	渐	001011	27	巽	011011	43	家人	101011	59	小畜	111011
12	小过	001100	28	恒	011100	44	丰	101100	60	大壮	111100
13	旅	001101	29	鼎	011101	45	离	101101	61	大有	111101
14	咸	001110	30	大过	011110	46	革	101110	62	夬	111110
15	遯	001111	31	姤	011111	47	同人	101111	63	乾	111111

图 2·4·2　六十四卦与二进制数对照表

图2·4·2中卦象的右边是二进制数，与卦名左边的十进制数相等。关键在每卦六爻都是从下向上读，《说卦》称“易，逆数也”即此之谓。

清初，在北京的白晋（J. Bouvet，1656～1730）神父给莱布尼兹寄去一部《易经》。在保存于德国汉诺威图书馆中两人讨论《易经》的信件里和莱氏的著作中，后者认为，二进制顺序在远古时代的《易经》中已被应用①，这位微积分的奠基人相信古代中国人在发明二进制计算方面有优先权②。这一看法广为传播，产生了很大影响。

我国数学史界不少学者对此持保留意见。卦爻可用二进制解释与它本身具有二进制含义不同。国外也有人认为六爻不具有数字意义，这是不了解九六说的缘故。当然，九六说亦不能证明卦爻本身具有二进制含义。我们的着眼点在于，作为二元哲学的一种模式和数学符号的一种体系，八卦数理本身的抽象性带来了与之相应的普适性。近现代科学的某些进步，例如64个遗传密码，似乎也可与六十四卦建立对应关系，当然不能认为易的时代已了解生命的奥秘。但《系辞传》所说包牺氏始作八卦的雄心，在“以通神明之德，以类万物之情”，所用的是概括性很强的哲学—数学方法，难怪“多年来这本书在西方吸引了一批追随者的崇拜。”

将图2·4·2数列首尾对应项相加，按十进制算，和为63；按二进制算，和为111111；按九六说算，和为90。六十四卦共32对，乘90得总数2 880。借用合期的说法，取4为因数，则乾卦54×

---

① Needham，J. Science and Civilisation in China Vol. 2. Combridge 1956. 340～343

② Leibniz，G. W. Explication de l'Arithme'tique Binaire Mem. Acad. Royale de Sci. Paris 1703. 13，85

4＝216，坤卦 36×4＝144，两者和 360，2 880×4＝11 520。所以《系辞传》说：“乾之策二百一十有六，坤之策百四十有四，凡三百有六十，当期之日。二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。”

依图 2·4·2 卦序排成 8×8 方阵，其阴阳卦与奇偶数都交错而相对为内外四重[①]，每卦反排（颠倒）后都恰有一卦与之相等，有的关于中心为对称，有的均衡地交错对应，种种微妙关系从阴阳相生相克的观点看来，更添了一层神秘色彩。

依图 2·4·2 卦序将 0～31 卦沿右半圆从下向上逆时针方向排列满，再将 32～63 卦沿左半圆从下向上顺时针方向排满，就得到圆形的六十四卦方位图。古人的这种排法使得 32 对对应的卦都处在关于圆心相对的位置。将上述方阵内容此圆中，用以象征“天圆地方”。

我们对认为八卦数理中包含有算术三角形或将它与现代科学某些成就直接联系起来的方法持慎重态度。在《周易》或有关史料中还没有发现支持这些观点的材料，何况方法本身也是有争议的。将《周易》现代化的努力有以今代古、以今乱古之嫌，超出本书范围。

4.《周易》揲法

《系辞传》称：“大衍之数五十，其用四十有九。分而为二，以象两；挂一以象三；揲之以四，以象四时；归奇于扐，以象闰；五岁再闰，故再扐而后挂。……是故四营而成易，十有八变而成卦。”这是对占筮取兆方法的说明，历史上有许多解释，宋理学家朱熹（1130～1200）在《易学启蒙》和《蓍卦考误》中对揲蓍之法有详尽的辨正，以后被奉为释易的经典。他引述了《易学正义》以及刘禹锡、李泰伯、沈括、程颢等七八人的说法，认为

① 黎凯旋．易与数理．易学应用之研究第三篇．142～144

“诸家揲蓍说，惟（梦溪）笔谈此论简而尽。”[1] 这里引用朱说，参考今人的研究[2]，对《周易》揲法作一数学上的解释并给出证明。

蓍占是一种植物占，是在一些原始前兆迷信的基础上逐步形成的一种占卜形式，它的流行较为普遍，占具为蓍草或筮竹，根据数目的奇偶来判断吉凶。蓍（shī），蒿属，多年生草本植物，《尚书·洪范》说它“百年一本”，古时被视为神灵之物，《史记》也说它“生满百茎者其下必有神龟守之”，古人用它来决疑，蓍也因问占者地位不同而分若干等级：天子之蓍九尺，诸侯七尺，大夫五尺，士三尺。《周易》的蓍法已脱离原始阶段，专事占算的筮人才能掌握。揲（shē 或 dié），或作抴，揲，动词，阅持之意；扐（lè），指筮人把奇数（这里是“奇零”数 1，2，3，4）根蓍策夹在手指间。作了这番解词之后，开头所引“大衍之数五十”一段话，可分解成如下几部分：

（1）蓍策总数是 50 根，去其一以象征太一即太极，实际用于占算的是 49 根；（2）把它们任意分成两部分以象征天地“两仪”，从第一部分里取一根不参与计算，叫“挂一”，配上“两仪”，象征天地人“三才”；（3）将第一部分蓍策每 4 根一组数出，叫“揲四”，象征春夏秋冬四时；（4）将所余的奇数（1，2，3，4 其中之一）根蓍策夹在左手指间，叫“归奇于扐”，象征闰年；（5）将第二部分蓍策也照（3）（4）办理。于是两部分“归奇”的蓍数非 4 即 8，加上“挂一”的一根，共 5 或 9 根不用，完成了“第一变”，此即所谓“初一揲不五则九，是一变也”（朱熹）。余下 49－5＝44 或 49－9＝40 蓍参与第二变的计算，叫“再扐而后挂”，以象征“五岁再闰”。

---

① 御制朱子全书．卷 26，蓍卦考误．康熙五十二年（1713）殿本．29～41

② 刘蔚华．谈易数之谜．中国哲学，第六辑．20～21

第一变有必要详加分析。借用数学上的同余式符号“≡”来表示，揲法是以4为模余数为1，2，3，4（注意不包括零而包括4）的运算，下面标明“$\dot{\equiv}$”以示区别：$R\dot{\equiv}r\pmod 4$，$0<r\leqslant 4$.

大衍之数五十，其用四十有九	$50-1=49=R$
分而为二，（以象两）	$R=R_1+R_2$
挂一（以象三）	$(R_1-1)+R_2=48$
揲之以四，（以象四时）	$R_1-1\dot{\equiv}r_1\pmod 4$
	$R_2\dot{\equiv}r_2\pmod 4$
归奇于扐，（以象闰）	$r_1+r_2=4$ 或 8
	$1+r_1+r_2=5$ 或 9

通过以上步骤能否保证“初一揲不五则九”？即第一变后所余蓍数40或44均为4的倍数是否必然的？经分析可知，这一结果在数学上是确定的。

引理[1]　若 $a\equiv b$，$a_1\equiv b_1\pmod m$，则 $a\pm a_1\equiv b\pm b_1\pmod m$.

分揲定理　已知 $R=R_1+R_2$（$R, R_1, R_2\in \mathbf{N}$），若 $R\equiv r\pmod m$，$R_1\equiv r\pmod m$，$R_2\equiv r\pmod m$，则

$$r_1+r_2=\begin{cases} r \text{ 或 } m+r & (r\neq 0),\\ r \text{ 或 } m & (r=0).\end{cases}$$

证明：将 $R_1\equiv r_1\pmod m$ 和 $R_2\equiv r_2\pmod m$ 相加，由引理，

$$R=R_1+R_2\equiv r_1+r_2\pmod m.$$

已知 $R\equiv r\pmod m$，与上式相减，由引理知

$$r_1+r_2\equiv r\pmod m,$$

亦即　　$r_1+r_2=km+r\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$

由于　　$0\leqslant r_1<m$，$0\leqslant r_2<m$，即有 $0\leqslant r_1+r_2<2m$，

---

[1] 华罗庚．数论导引．第二章同余式§2定理2。

由此　　$k=0$ 或 1.

当　$0<r<m$ 时，$r_1+r_2=r$ 或 $m+r$，

当　$r=0$ 时，　$r_1+r_2=r$ 或 m. 证完。

具体到揲法的规定 $0<r, r_1, r_2\leqslant m$，可知

$$0<r_1+r_2\leqslant 2m,$$

同样有　　$k=0$ 或 1.

当　$0<r<m$ 时，$r_1+r_2=r$ 或 $m+r$，

当　$r=m$ 时，$r_1+r_2=m$ 或 $2m$.

据分揲定理，$48\equiv4\ (\text{mod}4)$，这里 $r=m=4$，故必有 $r_1+r_2=4$ 或 8，$1+r_1+r_2=5$ 或 9，没有疑问了。

（6）第二变揲法仿上（2）～（5），用蓍 40 或 44 根：

$40=R_1+R_2$	$44=R_1+R_2$
$(R_1-1)+R_2=39$	$(R_1-1)+R_2=43$
$R_1-1\equiv r_1\ (\text{mod}4)$	$R_1-1\equiv r_1\ (\text{mod}4)$
$R_2\equiv r_2\ (\text{mod}4)$	$R_2\equiv r_2\ (\text{mod}4)$
$r_1+r_2=3$ 或 7	$r_1+r_2=3$ 或 7
$1+r_1+r_2=4$ 或 8	$1+r_1+r_2=4$ 或 8

此即所谓“第二揲，不四则八，是二变也。”据分揲定理，$39\equiv3\ (\text{mod}4)$，$43\equiv3\ (\text{mod}4)$，两者都有 $r_1+r_2=3$ 或 7，故 $1+r_1+r_2=4$ 或 8，为不易之数。

（7）第三变揲法仿二变，用蓍或 $40-8=32$，或 $40-4=36$，$44-8=36$，或 $44-4=40$ 根，三者必居其一。据分揲定理，$39\equiv35\equiv31\equiv3\ (\text{mod}4)$，三种情况下都有 $r_1+r_2=3$ 或 7，且 $1+r_1+r_2=4$ 或 8，即所谓“第三揲亦不四则八，是三变也。”三变后所余或 36，或 32，或 28，或 24 策，均为 4 的倍数。这时“以三变挂

扐之策分措于三指间，……且一手所操，多至二十五策。"[①]

（8）将第三变的余蓍以四除之，则得九、八、七、六。以上揲蓍目的，就是为了取得这四数之一。九即老阳＝，六即老阴⚏，七即少阳⚎，八即少阴⚍。于是数字变成了爻象。《易学正义》说："四营而成易者，谓四度经营蓍策乃成易之一变，"经三变而成爻象，故"十有八变而成卦"。

综上，揲法有两个特点：有确定的程序（2）～（8），要获得确定的结果九、六、七、八，这对于希望驭繁执简的筮人是成败攸关的问题，繁复的手续和某种随意性都是做给人看的，算不出四数之一，占蓍就要破产。虽然《周易》不会有分揲定理的表述形式，但古人在漫长的年代里积累了经验，能够应用这一数学规律，将程序和结果记录下来，却是考之有据的。它包含着深邃的数学道理，反映了古人智慧的光辉。在这个意义上讲，也不妨将它称做"周易分揲定理"。当然它也包裹着浓厚的神学色彩的外衣，被筮人利用后，成为几千年对占法迷信的一个原因。

从数学上进一步分析。以 4 为模，将正整数 $R-1$ 分成四个剩余类：〔1〕，〔2〕，〔3〕，〔4〕（即〔0〕）；揲法第一变的运算程序使四类中的元都变为类〔3〕中的元，即变成能被 4 整除的数；在二、三变之后，这一性质保持不变。该类对叫做"揲法"的运算自封。这对筮人大有用处，他可以不动脑筋照章办理，看来似乎暗藏玄机，结果却在预料之中。筮人的聪明，不能不令人惊叹。

当然，由于必须算出九、六、七、八四数，在揲法程序的规定下，入算的数 R 在正整数中必有一确定的范围。可以证明，它应满足 $R-1=4k+r$（$k=11$，$r=1, 2, 3, 4$），亦即 R 只能是 46，47，48，49 四数之一。若取 $R \leqslant 45$，则算出数必有可能 $\leqslant 5$；若取

① 御制朱子全书，卷 26. 蓍卦考误. 康熙五十二年（1713）殿本. 29～41

$R \geqslant 50$，算出数必有可能$\geqslant 10$。这些情况一出现就使占算破产，筮人均予排除。这就是为什么“大衍之数五十，其用四十有九，”为什么要“挂一”等，数学道理已如上述。迄今许多易学大师，对“大衍之数”越讲越玄，令人如坠五里云雾。由于没有进行数学分析，那些解释有的难以成立。扫清笼罩在易数上的迷雾，有助于认识含于其中的哲理。

5. 易图曲线与易卦概率问题

通常所见到的八卦图（图2·4·1）的中心，往往画着一个太极图（图2·4·3），圆中的曲线，由两小圆半圆吻接而成，小圆的直径等于大圆的半径，两圆心处再画两小小圆。颜色黑白相错，这就是俗称的“阴阳鱼”了。

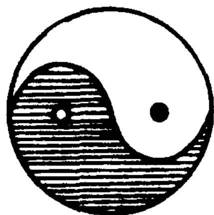


图 2·4·3　太极图

太极图表现了古人的智慧，S 形曲线表示相反相成的观念，以此为分界，阴阳各半，但并非一刀切开，而是象征在旋转往复中此消彼长的两种力量、两种元素；两条“鱼”首尾相接，一边从小到大，一边从大到小，互相补充，互为因果[①]，给人以变动不居的印象。这一几何图案在古人心目中是深邃与必然的象征，阳盛阴衰，阴盛阳衰，剥久必复，否极泰来；在西方，它也获得好感与喜爱：“量子力学的创始人、丹麦大物理学家波尔（Niels Bohr，1885～1962），在他被封为爵士的时候，选中了中国的太极图做他的徽章。”[②]英国李约瑟（J. Needham）设计的一个会徽也以太极图为中心。

古人明了福祸、吉凶、利害之间可以互为因果，形成一种四

① 刘蔚华. 谈易数之谜. 中国哲学，第六辑。

② 李政道语，转引自黎凯旋：易学应用之研究129页；又见P. 罗伯森著，杨家福等译. 波尔研究所的早年岁月（1921～1930）. 科学出版社，1985. 扉页前的插页

段式的辩证推理过程：吉必生吝，吝必生凶，凶必生悔，悔又归吉[1]。把这个关系画成圆形（图 2・4・4a）或菱形（图 2・4・4b）。以此为基本图案推衍开来，在建筑装饰上时有所见，取“吉祥如意”的意思。

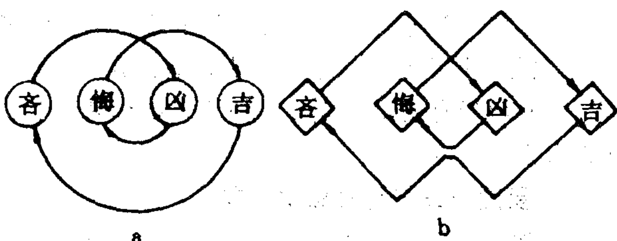


图 2・4・4　吉凶悔吝图

但是，这些图主要是示意性的，并不要求有几何上的严格性。因而认为它与两支相对的阿基米德螺线类似[2]，恐怕是讲不通的。同样，将太极曲线与等角螺线、河图曲线与丽都螺线相比附，也未免失之于牵强，它们在几何学中的意义是需要专门研究的。

本节最后一个问题，讨论一下《周易》中吉凶休咎出现的频率，即概率问题。

古往今来，人类面对两大困惑：总有讲不清楚的原因，总有无法预测的未来，于是筮人术士便应运而生、代不乏人。未来事物出现的可能对人类的精神有着极大的吸引力，一般人们不能先知先觉，占卜家便成为最有学问的专家，受到人们乃至帝王的尊重。但是，如果有好多占家，那么谁说的对呢？早在《尚书・洪范》中就探讨过卜筮稽疑的多种可能性，它采取依多数决疑的原则：“三人占，则从二人之言。”如果君主有重大疑问需要解决，就要“谋及乃心，谋及卿士，谋及庶人，谋及卜、筮。”它划分了六种情况：一、君臣民卜筮五方皆同，“是之谓大同”，大吉；二、君卜筮三者同，臣民反对，仍吉；三、臣卜筮三者同，君与民逆，仍

---

(1)(2) 黎凯旋．易学应用之研究．108

吉；四、民卜筮三者同，君与臣逆，仍吉；五、君卜二者同，筮臣民三者逆，“作内（家事），吉；作外（国事），凶。”六、“龟筮共违于人，用静（无为），吉；用作（有为），凶。”[1]

由上记载可以看出，判断吉凶的五因素中各因素并非同权的。可以认为，在比较同与逆的加权值的大小之后，才作出吉与凶的决断。君主重神意，卜者又在筮者之前，当然他自己的意见也占相当份量；臣意与民意，大略相当。如果给“大同”赋值 100，“五方”依次设为 x，y，z，u，v，那么上面六条件可以列出一个等式、三个不等式、两个近似等式，用模糊数学的方法算出“五方”之值的取值范围，可用作参考。另外，还注意到后两条吉凶均依对象不同而变化，可吉可凶，根本的原因是同逆两方加权之和大体相等。这样看来，古代君主采取了明智的决疑政策，这是早期概率统计思想一个古老的例证。

《易经》是最古的占筮用书，它的关于吉凶休咎成败得失的记录，从客观上反映了现实生活中各种随机事件出现的概率。刘蔚华作过一个统计[2]：“我粗略地把《易经》中卦爻辞的吉凶断语，分为大吉、一般的吉、利、无咎无悔、悔吝咎不利、凶、厉等七类，对其出现的次数和所占比重作了一个统计”如图 2·4·5 所示：

断语	大吉元吉	有利	吉祥	无咎无悔	悔吝咎不利	凶	厉
次数	21	103	125	124	65	56	27
比率	4%	19%	24%	24%	12%	11%	6%
合计	373（71%）				148（29%）		

图 2·4·5 《易经》吉凶统计

① 刘蔚华．谈易数之谜．中国哲学，第六辑．23

② 刘蔚华．谈易数之谜．中国哲学，第六辑．24

我们据此绘制了图2·4·6。图中实曲线大体相当于《周易》吉凶的概率曲线，可与正态分布的虚曲线进行比较。总的说来，吉祥类的比重较大，占$\frac{5}{7}$，非吉祥类占$\frac{2}{7}$，好事比坏事多，既可告慰于求占者，又使筮人博得好感，何乐而不为！这种吉多凶少的预言对后来为迎合统治者而及喜不及忧是有影响的，成为传统文化的组成部分。当然，除了政治或社会心理上的需要之外，大概这一曲线也从一个侧面反映了当时社会安定与动乱的客观情况。

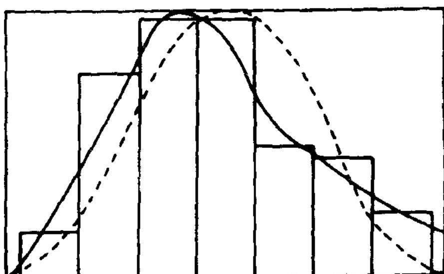


图 2·4·6　《易经》吉凶统计图

总之，占算是一种猜度术，它根据经验来模拟客观必然性，又相信偶然性的机遇来未卜先知。但它还不是自觉的概率论思想，这是需要说明的。

第二节　先秦诸子的数学观

1. 管仲的重数政策

管仲（？～前645），春秋初期政治家，名夷吾，颍上（今安徽阜阳东南）人，齐桓公任命为卿，在齐国进行改革，分国都为十五士乡和六工商乡，分鄙野为五属，设各级官吏管理，并以乡组成军事编制，改革选拔人才制度，士经三次审选，可作“上卿之赞”（助理）。主张按土地好坏分等征税，适当征用力役，禁掠家畜，官办盐业，铸造和管理货币，调剂物价，因而国力大振，帮助齐桓公以“尊王攘夷”相号召，九合诸侯，一匡天下，使成为春秋时第一霸主。管仲去世，桓公怠于政事，佞臣用权，霸业遂

衰。管仲的言论见《国语·齐语》，另外《管子》书虽是战国齐人著，也保存了管仲的一些思想。

管仲改革注重法治，他说："圣君任法而不任智，任数而不任说，任公而不任私，任大道而不任小物，然后身逸而天下治。"（《管子·任法》，以下只列篇名）即是说，圣君治国依靠法治而不依靠个人才智，根据规律而不根据说教，凭公正而不谋私利，掌握大政而不问琐碎小事，这样就可以做到垂拱而天下治。《管子》给"法"下定义说："尺寸也，绳墨也，规矩也，衡石也，斗斛也，角量也，谓之法。"（《七法》）"法者天下之仪也，所以决疑而明是非也，百姓所悬命也。"（《禁藏》）规矩绳墨和度量衡具这些仪器成为法的中心，成为衡量一切的尺度、判断是非的准则、进行赏罚的标准，故百姓生死与之相关。文中所说的"数"，含义非常丰富，在不同引文中，具有术、技、方法，知识、理论、规律，数量、计算、数学等义，是一基本概念。管子说："舍数而任说，故民舍实而好言"，认为"数"具有实质的内容，与说教或议论根本不同。管仲非常重视客观事物的数量关系，他提出了具有哲学原则高度的七条法则：则（法则或规律）、象（现象）、法（标准或制度）、化（教育和感化）、决塞（疏导与堵塞）、心术（思想方法）和计数，后者已成数学专名，当时的意思是："刚柔也，轻重也，大小也，实虚也，远近也，多少也，谓之计数。"（《七法》）数量与空间关系兼而有之，可以认为，"计数"就是计算数学。这是最早的数学的定义。作为"七法"之一，计数的重要性在于，"举事必成，不知计数不可"，又说"不明于计数，而欲举大事，犹无舟楫而欲经于水险也。"即数学为成事必须的工具。一次桓公与管仲对话。"桓公曰：'事名二，正名五，而天下治。……何谓正名五?'（管仲）对曰：'权也，衡也，规也，矩也，准也，此谓正名五'。"（《揆度》）管仲把校准规矩和度量衡器作为治理国家的头等大事，认为只有坚持七法的原则，才能做到"治民有器，为

兵有数，胜敌国有理，正天下有分。"（《七法》）可见，管仲重视数学的政策已经成为振兴齐国、一匡天下的政治总方针的组成部分，也是他的整个社会政治哲学思想体系的组成部分①。这一政策使齐国的财政经济、军事行动等内政外交活动得以建立在一个比较科学的计算的基础之上，同时也促进了人材的擢用和数学的发展。汉代韩婴的《韩诗外传》记载着这样一段故事："齐桓公设庭燎以待士，期年而士不至。于是东野有以九九见者。桓公戏之曰：九九足以见乎？鄙人曰：九九薄能耳，而君犹礼之，况贤于九九者乎？桓公曰：善。乃因礼之。期月，四方之士相导而至矣。"能背九九表的东野鄙人也能受到桓公礼遇，在历史上已传为美谈；同时也反映出当时乘法口诀已在社会上普及，不算什么大学问。另外，我国第一部工程技术著作《考工记》——其中也包含了丰富的数学内容——之所以出现在战国时期的齐国，这与当年管仲首倡重数之风也是不无关系的。

《管子》中的经济数学

《管子》一书一般认为是战国时齐国稷下学宫各学派作品的汇编，有人称之谓"稷下丛书"②。具体时间在宣、湣王时（前319～前284），法、道、儒、名、农、阴阳、轻重诸家在稷下讲学，互相交流，成为战国时百家争鸣的学术中心。《管子》书托管仲之名将诸家言"杂盛于一篮"③，《汉书·艺文志》记《管子》86篇，今已亡佚10篇，内容涉及哲学、政治、经济、军事、法律以及自然科学的地理、生物、农学、医理、乐理、数学等，可谓战国时的一部百科全书。

《管子》后19篇（亡三篇）是一组称为《轻重》的经济学论

① 周瀚光．略论先秦数学和诸子哲学．复旦学报，哲学专辑．1981．124

② 顾颉刚．周公制礼的传说和《周官》一书的出现．文史，（六）．16

③ 郭沫若等．《管子集校》叙录．10

著，在我国经济学史上占有重要地位。在讨论经济问题时稷下学者较多地使用了数学方法，开经济数学之先河。

在《轻重二·乘马数》篇里，管子讲到农业劳动力人口与供养人口之比因政策不同而有异，他说："有一个耕而五人食者，有一人耕而四人食者，有一人耕而三人食者，有一人耕而二人食者。"这是早期比例的一种表述形式。又如管子说共工时代天下"水处计之七，陆处计之三"，(《轻重十一·揆度》，以下只列篇名）既含比例，又有分数。一般分数表为"几分之几"，如十分之二、三、四、五、六、七等。《管子》中有大量乘除运算。在《地员》篇中分析土壤达 90 种之多，仅丘陵山地即有 14 种，它说："土地高下，水泉深浅，各有其位"。提出依地层深度对土质分类的方法，一"施"为七尺，$7n$ （$n=1$，2，…，20)，一直讲到二十施的深度。当时学者研究历法，注重按时令劳作。"力地而动于时，则国必富矣。"(《小向》）全书首篇《牧民》开卷第一句即："凡有地牧民者，务在四时，守在仓廪。"一年 360 天有四分法（即四季)、五分法、八分法。五分法称（《五行》)：

"睹甲子，木行御……七十二日而毕。"

"睹丙子，火行御……七十二日而毕。"

"睹戊子，土行御……七十二日而毕。"

"睹庚子，金行御……七十二日而毕。"

"睹壬子，水行御……七十二日而毕。"

这是受五行思想影响的一种分法。八分法将一年分成 8 个 45 天，作为春始、春至、夏始、夏至、秋始、秋至、冬始、冬至时刻发布政令的依据。另外，也有了乘幂的表示法："凡将起五音，凡首，先主（立）一而三之，四开以合九九。"(《地员》）这是在讲音律时应用了 $3^4=81$ 的算法，所谓"四开"，即是四次幂。接着文中又有"三分而益之以一，为百有八，为徵"，说明使用三分损益法制

定音律，这里有 $81\times\frac{4}{3}=108$。综上，《管子》书中已有完备的四则运算算法，这是经济数学必备的知识。

《管子》在讨论经济、财政、贸易问题时使用了大量计量名词如钷、釜、钟、升、斗、石等。反映了战国齐地度量衡制度的沿革，是计量史不可多得的史料。书中也有许多价格和以货易货的比例问题。这里只举出两例，说明《管子》的经济数学已使用了分析和统计的方法。

《海王》篇叙述桓公与管子商讨国家税收计划，管子主张征收盐税，他说人人都得吃盐，“终月大男食盐五升少半，大女食盐三升少半，吾子（指少年男女）食盐二升少半[①]，此其大历（大概数）也。盐百升而釜[②]，令盐之重升加分强[③]，(每升盐收半个钱的税）釜五十也，……”由这一基本分析作为出发点，进而讨论了每升盐假如收一个钱、两个钱，则“万乘之国人数开口千万”，仅盐税一项使齐国可得岁入六千万。通篇以数学计算为据，论说雄辩有力，“人无以避此者，数也。”类似的方法也应用于推算粮食税：“中岁之谷，粜石十钱。大男食四石，月有四十之籍（税）；大女食三石，月有三十之籍；吾子食二石，月有二十之籍。岁凶谷贵，籴石二十钱，则大男有八十之籍，大女有六十之籍，吾子有四十之籍。……”（《国蓄》）这种以数学的分析和统计为基础的方法在研究社会经济问题中具有基本的重要性。

---

① 马元材云：《汉书·赵充国传》“凡万二百八十一人，用谷月二万七千三百六十三斛，盐三百八斛，”计每人每月用盐二升九合强。较吾子稍多，较大女（三升少半）稍少，较大男（五升少半）则相差甚远，当是男女老少之平均数。见《管子集校》，1040页。

② 马元材云：齐量制四进与十进并行。《管子》以四升为豆，五豆为区，五区为釜，故“百升而釜”。

③ 闻一多．附加之价曰强。《小尔雅·广诂》“强，益也”。

《管子》中实际上已使用了统计数字表，当然原文是叙述的方式。例如《揆度》篇对“百乘之国”、“千乘之国”、“万乘之国”领土大小、人口、车辆、马匹多少等13个指标都用不同的数字来规定，反映了春秋时诸侯国家等级制度在数量上的差异。特别有意义的是，在《轻重丁》篇里，记录了桓公与管仲为了解富商放贷及贫民受高利贷盘剥的情况而组织了社会经济调查大队，派宾胥无、隰朋、宁戚、鲍叔4位重臣分别驰向齐国的南、北、东、西四方。“四子之行定，夷吾（管仲）请号令谓四子曰：子皆为我君视四方称贷之闻（家），其受息之氓[1] 几何千家，以报吾。”这是一次有目的、有领导、有组织、有部署、有纲领的经济调查工作。于是，“鲍叔驰而西，反（返）报曰：西方之氓者，带济负河，菹泽之萌（氓）也。渔猎取薪，蒸而为食。其称贷之家，多者千钟，少者六七百钟；其出之钟也一钟。其受息之萌九百余家。”其他3位大臣也按照类似的格式向管仲汇报了调查的结果。管仲将各类数字汇总起来：“凡称贷之家，出泉（帛）叁千万，出粟数千万钟，受子息民三万（千）家。”这可以说是中国历史上第一个社会经济数字的统计报表，说明至迟在公元前四、三世纪之交，中国学者已把数学统计的方法较完美地应用于社会经济状况的普查中。

2. 孔子与数学[2]

孔子（前551～前479），鲁国陬邑（今山东曲阜东南）人，生活在春秋末期，在我国历史上产生过重大影响的思想家、政治家、教育家，儒家的创始者。孔子出生于没落的贵族家庭，从小“贫且贱”，不得不做一些贵族们不屑为之的“鄙事”，如当“乘田”（管畜牧）、“委吏”（司会计）以及替人办丧事等，接触了实际。

① 郭沫若. “受”与“授”通，“授息之氓”即负债之家。《管子集校》，1256页。

② 骆承烈. 孔子与数学. 曲阜师院学报自然科学版，1985（2）：91～95.（3）：91～93

《孟子·万章下》记“孔子尝为委吏矣，曰‘会计当而已矣’。尝为乘田矣，曰‘牛羊茁壮而已矣’”。《史记·孔子世家》记“孔子贫且贱。及长，尝为季氏史，料量平。尝为司职吏而畜蕃息。”这些材料是说他当会计时善于计算，帐目清楚；管牲畜时懂得饲养方法，如配料用量适当等；管仓库则能正确使用量器，准确秤量粮食。这些本领都包括一些计算的能力。

孔子说：“吾不仕，故艺”（《论语·子罕》，下面引文只注篇名），即说他不做官就得学会自立于社会的本领；又说“志于道，据于德，依于仁，游于艺”（《述而》），后一句是说要学会多种真本领。他所说的“艺”具体指什么呢？司马迁经过大量阅读文献和实地考察，总结出孔子用“六艺”来教育学生，就是礼、乐（国家政治活动）、射、御（骑射等军训）、书、数（书写与计算）。这个“数”就是数学之数，而不是古代的数术。确切地说，“数”指“周官九数”，它包括方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要，九种名目与《九章算术》大同小异[①]。把数学作为教学内容之一，而且按“有教无类”的原则向社会各阶层普及，这在中国历史上属于首创。孔子的弟子子贡具备了数学知识，擅长计算，经商齐鲁之间而成巨富；另一个弟子冉求多才多艺，善于从政，后来帮助季氏聚敛财富。这些都从侧面反映了“六艺”教育的结果。

孔子50岁时由鲁国中都宰升任司寇，他注意经济管理，主张“足食、足兵”（《颜渊》），“博施于民而能济众。”（《雍也》）《荀子·儒效》记载：“仲尼将为司寇……鲁之粥牛马者不豫贾，必蚤正以待之也。”是说他管理市场有方，能使物价平稳，由于对价格有控制，卖牛马的不敢漫天讨价。孔子从政，认为“政在节财”（《韩非子·难三》），主张“谨权量，审法度，修废官，四方之政

① 见《周礼·地管》“六曰九数”的注与疏。

行焉”，第一条就是要检验度量衡，测定长度、容积和重量单位是否准确。

《论语》是儒家记载孔子及其弟子言行的一部言论集，是研究孔子思想的一部重要典籍。《论语》共20篇514章，15 000多字，涉及数字的有220字（从一到十、百、千、万出现的次数依序为：23，8，64，18，15，10，6，2，5，19，12，5，2。此外还有“两”2次，“再”2次，“半”1次，“期”3次，“数”4次，“多”19次），占全书的1.5%。分别为基数、分数、约数等。

基数即普通整数，占了大半。如“百姓有过，在予一人”（《尧曰》），“周监于二代”（《八佾》），“三年无改于父之道”（《学而》），“有君子之道四焉”（《公冶长》），“禄之去公室五世矣”（《季氏》），“六言六蔽乎”（《阳货》），“作者七人矣”（《宪问》），“周有八士”（《微子》），“君子有九思”（《季氏》），“十世可知也”（《为政》）。还有整数连用的，如“吾十有五而志于学，三十而立，四十而不惑，五十而知天命，六十而耳顺，七十而从心所欲，不逾矩”（《为政》）等。

分数：当时还没有“几分之几”的表达形式，如“三分天下有其二”（《泰伯》）是说殷末周文王据有国土$\frac{2}{3}$。季康子与孔子谈到收租时说：“二，吾犹不足”（《颜渊》），“二”指$\frac{2}{10}$或0.2。

约数即概略数，如“六七十”、“百物”、“千驷”、“千乘之国”、“千室之邑”、“诗三百”等，古时习惯以三、九为多，所以出现的频率也高。还有一类虚指的数，泛言其多，如“吾日三省吾身”（《学而》）是说曾子每日几次反躬自省，“季文子三思而后行”（《公冶长》）是说他办事之前反复思考。类似的还有“闻一知十……闻一知二”（《公冶长》），“善人为邦百年”、“九合诸侯，一匡天下”（《宪问》）等。这些数既有数词的意义，又添加了文学上的修辞因素，补充和发展了数的内涵，成为先秦古籍在语言

上的一特点。

《论语》中将数字与其他词类连用后，有的变成了专有名词，有的变成了副词等。如“四海之内皆兄弟也”（《雍渊》），“使于四方，不辱君命”（《子路》），“四时行焉，百物生焉”（《阳货》），“四体不勤，五谷不分”（《微子》）；在许多篇内提到的“二三子”都是指孔子的几个学生；又如“百官”、“百工”、“万方”、“百姓”，扩大了数字原有的概念；“三家”、“三桓”、“三代”、“八佾”都有确定的内容。这些用法有使名词数字化的倾向，当然不独《论语》如此，其他古籍亦然，在汉语中产生了深远影响，至今如“五讲四美三热爱”等等，俯拾即是，相当于长篇名词的缩写形式，数字成了代码。至于后一类情况，如“一日克己复礼”（《颜渊》）、“一朝之忿忘其身”（《颜渊》）等，一日指一旦，一朝指一时，均为副词。所以《论语》将数词用活了，丰富多彩。

《论语》中有些词如“两”、“半”、“期”（一个月）等具有数字含义；而今天，数字“亿”当时却是猜测之意，通“臆”，出现两次，均不作定数解。

从商周出土的青铜、器皿、车辆及古建中可以看出当时在测量计算已达一定的精度；到了孔子的时代，有关文献上的记载也反映了春秋时度量衡的标准和计量的水平。

先看长度和面积。《泰伯》记曾子说：“可以讬六尺之孤，可以寄百里之命”，意指可把幼小的孤儿也就是国家的命运交付给一个君子。按周尺长 19.91 厘米[①]，六尺约 119 厘米，不足成人。《史记·孔子世家》称：“孔子长九尺有六寸，人皆谓之长人”，折成公制，孔子身高 191 厘米，今人亦不多见。《国语·鲁语》记陈晋公问古代的一种“楛矢”，孔子说“其长尺有咫”。按周尺 8 寸为咫，所以这种箭长 35.8 厘米。《孔子家语》记孔子言：“布指知

① 吴承洛．中国度量衡史．54

寸，布手知尺，舒肘知寻。”是说中指前两节为1寸，拇指与中指的一拃为1尺，两臂伸开长8尺为一寻。这种计量长度的简易方法在民间流传至今。《孔子家语》为魏人王肃（195～256）撰，但汉人戴德的《大戴礼记》亦有同样记载。另外，孔子整理的《诗经》中有“千亩其耘”的句子，孔子也曾多次与季康子议论田赋的事，都与田地面积、产量、人口、赋税有关。

再看容量和重量。孔子说：“噫！斗筲之人，何足算也！”（《子路》）当时一斗合今1 937毫升[①]，筲是容一斗二升的小竹筐，比喻人见识短浅，气量狭小。《论语·雍也》记“子华使于齐，冉子为其母请粟，子曰‘与之釜’。请益，曰‘与之庾’。冉子与之粟五秉。”这里一釜等于当时6斗4升，庾容16斗，秉合16斛，斛为10斗。《国语·鲁语》记季康子用田赋，使冉有访孔子，子曰“其岁收，田一井出稯禾，秉刍，缶米，不是过也。”其中缶同庾，刍是草。由这段看出当时的农业生产水平。《庄子·寓言》记“曾子再仕而心再化，曰‘吾及亲仕，三釜而心乐’。后仕，三千钟而不洎，吾悲。”其一钟为十釜，即六斛四斗。

从上述内容可以看出孔子对数学的认识在于实际的应用，以服务于农业社会的各种需要。与管仲高度重视数学在行政、经济管理中的作用不同，孔子教育注重德行，数虽列为课程之一，但排在六艺之末，并未把它作为精益求精的学问。由于儒家思想在中国历史上占据统治地位，作为法家代表人物的管仲尽管早于孔子，他的重数思想却没有得到继承和发展，有一种观点认为儒家排斥自然科学，只是在应用时才提到数学。这是一个较大的课题，需要充分论证。管仲的重数思想假如产生了重大影响，对以后数学发展，也许会有更积极的作用。当然假设对历史是没有意义的。但无论如何，在那个时代先哲们的共同影响下，大体上决定了以

① 吴承洛. 中国度量衡史. 58

后2500年数学在这个农业社会里的地位、作用和发展方向。

3. 名家的数学悖论

惠施，战国宋人，生卒年代不可考，约在公元前四世纪（一说，约在前370～前310年）。曾任魏相，与庄子（前369～前286）相友善，先秦著名的辩者。他的著作在《汉书·艺文志》中记有《惠子》一篇，已亡佚；《庄子·天下》"惠施多方"的一节保存了他的部分学说，前半部分通常称为"历物十事"；后半部分有二十多条辩者们的"奇谈怪论"，他们是惠施的朋友，经常与人辩论。当时人们就说，他们"能胜人之口，不能服人之心"。另外在先秦的其他一些典籍中，也记有惠施的零星言论事迹。

惠施属名家。所谓名家，不少学者认为不过是诡辩者的别称，他们玩弄名词概念，颠到是非，混淆黑白，巧言善辩借以攫取功名利禄。他们的言论违背常情，甚至好像是故作反语，"否定事物的质的规定，否认事物之间的质的差别，甚至根本否定任何确定事物的存在。"[①] 例如"今日适越而昔来"、"卵有毛"、"犬可以为羊"、"马有卵"、"丁子（蛤蟆）有尾"、"白狗黑"之类，的确是令人难以理解的。

但是，正理都有一定条件，常识也未必等于科学。在数学领域里，一些貌似背理或谬论的命题却是能够促使数学取得突破性发展的"悖论"。郭沫若说："惠施是先秦诸子中的一位巨匠。"又说："大体上惠施的理解，有些和现代微分、积分、量子、电子、天文年、地质年那样的观点接近，在先秦诸子中最有科学素质的恐怕就要数他了。"[②] 尽管对这句话的一些具体内容不敢苟同，例如墨子在科学史上的地位不应在惠施之下（因而在本书中将《墨经》从诸子中单独提出另辟一节），但对惠施的评价，却是极富启

① 任继愈主编. 中国哲学史. 上海：上海人民出版社，1957. 174

② 郭沫若. 十批判书. 253

发性的。

惠施与辩者提出的与数学相关的悖理有如下几条。

(1) 至大无外，谓之‘大一’；至小无内，谓之‘小一’。(历物十事之一)

译文[①]：最大的，没有东西能包含它的，叫“大一”；最小的，任何东西也不包含的，叫“小一”。

解说：原文内与外、大与小对举，意指“界限”消失。大而无界，自然无外；小而无界，自然无内。其大而无上限（或大于任意指定的上限），其小而无下限（或小于任意指定的下限）。但“小一”既不是原子，也不是无。这相当于数学中的无穷大和无穷小。

提出类似观点的，还有儒家的子思、墨子、庄子以及《管子》。“故君子语大，天下莫能载焉；语小，天下莫能破焉。”(《中庸》) 墨子的“非半弗新则不动”和无穷概念下文还要讨论。《庄子·秋水》说：“何以知毫末之足以定至细之倪？又何以知天地之足以穷至大之域？”《管子·心术上》说“其大无外，其小无内。”相比之下可以看出，惠施的命题最精辟、最准确。同时也说明，这种早期的、原始的关于无穷大和无穷小的认识在先秦的多家学说中都涉及到了，已经达到某种普及的程度。而惠施这一超越时代的哲学——数学思想在科学史上大放异彩。

(2) 一尺之棰，日取其半，万世不竭。

译文：一尺长的木杖，每天截取一半，千年万代也截不完。

解说：分割的对象，开始时是一根物质的东西，它是可分的、有一定的长度。到继续分割下去时，它变成了非物质的一条线段，原来二分的方法，可以无穷地进行下去。这是建立在递归推理的

---

① 朱牧．惠施哲学、逻辑学思想分析．中国哲学，1982 (8)：51～64

基础之上[①]：既然第 n 次分割可行，那么第 $n+1$ 次分割就必然可行，于是得出万世不竭的结论。它强调过程的无限性、线段无穷分割的可行性。这里的无穷是潜无穷大。

有的学者认为，这一脍炙人口的命题说明了“小一”是推理的极限[②]。应当指出，该命题并未强调过程的终结和无穷分割的极限。针对惠施的学说，墨子提出“新半，进前取也。前则中无为半，犹端也”，则是清晰的极限概念，下文还要提及。另外，从数学上说，推理的极限是零：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，作为无穷小的“小一”不是无，也不等于零，不应把“小一”同“尺棰”命题极限混为一谈。

（3）轮不碾地。

译文：车轮并没有碾在地面上。

解说：车轮看作几何圆；地面看作几何平面或与该圆相切的一条直线。圆周和直线上有无穷多个点，但圆沿直线（无滑动）滚动时只有一点相切，这个切点虽是变动的，却都没有长宽厚，因此说轮不碾地。当然，从物理上说，轮与地都是理想刚体。

但几何点并非“小一”，也不是在有无之间，它标明了空间中的精确位置，与表示小于空间中任何指定界限的“小一”分属不同概念。圆与直线的关系是数学史上研究的重要课题，“轮不碾地”强调“其相切之处只限于在一个无长度的点上，”[③] 并未强调“最后认为直线和曲线的相等是达到了。”惠施显然是精细观察了圆与直线相切的几何图形，我们猜测他可能运用逻辑推理而得出这一天才的命题：假如圆周上任意两点间的线段都在这一圆周上，那么就能得出“轮必碾地”的结论；根据当时已有的几何知识，这是不可能的，故命题成立。

---

① 朱牧．惠施哲学、逻辑学思想分析．中国哲学，1982（8）：54

② 朱牧．惠施哲学、逻辑学思想分析．中国哲学，1982（8）：54

③ 恩格斯．自然辩论法．北京：人民出版社，1963．222

（4）镞矢之疾有不行不止之时。

译文：飞得极快的箭镞也有既非前进也非静止的时刻。

解说：飞箭从离弦到中的的运动是连续的，轨迹也是连续的。从运动时间的任一瞬来看和从运动轨迹上的任一点上来看，箭镞既是静止的，又是运动的，论其状“不行”，论其势“不止”。这一论断建立在时间和运动曲线的无限可分性的基础上。

恩格斯说：“物体在同一瞬间既在一个地方又在另一个地方，既在同一个地方又不在同一个地方，这种矛盾的连续产生和同时解决正好就是运动。”[①] 这是从运动物体在空间中的位置的角度来表述运动的连续性；而辩者是从物体在运动中的状态来表述运动时间的无限可分性。真是“空谷之音，一时绝唱”[②]。

（5）南方无穷而有穷。我知天下之中央，燕之北、越之南是也。（历物十事之六、之九）

译文：南方是无穷的，却又是有穷的。我知道天下的中央在燕国的北方、越国的南方。

解说：古人一般认为天下之中央在阳城（今河南登封），在燕之南、越之北；又认为南方是遥远无穷无际的。对此条学者有多种解释。考虑到这里讨论的是“天下”、“无穷”等属于“大一”范畴的问题，而“大一”是没有中心的，因为中心、中央的概念的前提是存在着边界。惠施不认为天下有中央，所以故作背理，好像说：你认为天下有中央吗？好吧，你到燕之北、越之南去找吧。惠施思想方法的特点是对传统观念的反思，而“天下之中央”的观念却是中国传统地理、文化与政治观念的核心。同样地，一般认为南方无穷，而惠施却偏说：南方有穷也是对的。他的思维逻辑的依据，处处从“至大无外”的观点，指出普通事物之为有限

① 恩格斯. 反杜林论. 北京：人民出版社，1970. 117

② 朱牧. 惠施哲学、逻辑思想分析. 中国哲学，1982（8）

的、相对的。当然不排斥随着地理视野的扩大确证南方有穷的可能。

（6）矩不方，规不可以为圆。

译文：矩尺不可以画出方形，圆规不可以画出圆形。

解说："没有规矩不成方圆，"而辩者却否定地说，纵有规矩亦不成方圆。这种唱反调的思维方式与其他各条有一脉相承之处，但此条只有结论，没有推理或证明过程。体会这一断语，一种解释是，用矩和规作图仍存在着与标准方圆有差别的因素；一种解释是，用规、矩画出的是具体的圆、方，而不是观念上定义的圆、方。

辩者由于信赖思辩而忽视经验，使他们的一些命题沾染了相对主义诡辩论的色彩，因丧失其客观依据而降低了自身的价值。当然，善于提出反例、对概念作否定性考察在数学上仍然具有积极的意义，有时可以是一个新概念诞生的突破点。

（7）连环可解也。（历物十事之八）

译文：连环套是可以解开的。

解说：《庄子》说"得其环中以应无穷"及此条都提到连环。什么是连环？一种可能是指连环套，一般指九连环，是古代一种游戏器具，其构造和游戏规则具有拓扑性质，需要运用数学的分析方法、经过极为繁复的程序才能解开。如果没头脑或者乱了套，给人的印象是虽经无穷次也解不开。显然当时人们认为连环不可解。惠施却不以为然。为什么？一种解释说：不解而自解。第二种解释：把它打碎了也不失为一种解法。第三种解释：解开环上的连结点即可。三说形式上算是解开了连环，实质上并没有做到这一点。惠施的原意也许非常之简单：他能解开九连环。他是一个具有科学头脑、心思慎密的学者，做到这一点是有可能的。

名家学派还有公孙龙、戴晋人等，公孙龙与惠施对立，互相訾应，似同水火。他是战国赵人，字子秉，生活年代约在公元前

四世纪末、三世纪上半叶，为坚白同异之辩，多属逻辑学。《汉志》记《公孙龙子》十四篇，宋时只存六篇，这里不再讨论了。

英国学者李约瑟认为，先秦学者“有一些关于无穷小、穷竭法和积分的概念的基础。”他非常中肯地评价道：“从中国哲学的萌芽时代起，……连续概念和无限分割概念也已为名家——惠施的朋友们——清楚地表达出来了。”[1]

4. 兵家的早期对策论

对策论也叫做博弈论，是近60多年来才发展起来的一门数学分支，属于运筹学。对策论往往同竞争、对抗相关，实际上早在春秋战国时期，我国的兵家学派对早期对策论已作出了杰出的贡献。

在兵家著作中，春秋末期吴国军事家孙武（和孔子大致同时）的《孙子兵法》和战国中期齐国军事家孙膑（和孟子（约前372～前289）大致同时）的《孙膑兵法》最为著名。孙武和孙膑都是齐国阿（今山东谷阳东北）人，孙膑是孙武的后代。孙武字长卿，曾以兵法十三篇见吴王阖闾，被任为将，“西破强楚，入郢，北威齐晋，显名诸侯。”（《史记·孙子吴起列传》）他提出“知彼知己，百战不殆”，注重分析敌我、众寡、强弱、虚实、攻守、进退等全面的情况，这当然是作出最佳对策的前提。他还提出“兵无常势，水无常形，能因敌变化而取胜者，谓之神。”（《孙子·虚实》），这也是对策论中的一个基本原则。

孙膑被他的同学、魏惠王的将军庞涓骗去受膑刑（去膝盖骨）后，由齐国使者秘密载回，齐威王任为军师，协助齐将田忌，围魏救赵（公元前353年），马陵一役（前342年），全歼魏军10万，庞涓兵败自杀。这位中国历史上著名的军事家的著作《孙膑

① 李约瑟. 中国科学技术史，第三卷，数学.《中国科学技术史》翻译小组译. 北京：科学出版社，1978. 316～317

兵法》在失传1700余年之后，1972年4月从山东临沂银雀山一座西汉前期墓葬中，与《孙子兵法》及其他先秦兵书同时出土。《汉书·艺文志》所载该书有89篇，现整理出版的共30篇。孙膑发展了孙武“我专而敌分”的理论，提出了以寡胜众、以弱胜强的战争对策。在该书《威王问》里，孙膑回答了“威王问九、田忌问七”，在两军对峙的各种情况下应采取何种对策。如“两军相当，两将相望”时，“我强敌弱，我众敌寡”时，“敌众我寡，敌强我弱”时，……该如何指挥军队。《十问》篇同样以问答形式阐述了根据敌我力量的不同对比、敌人所摆出的不同阵式（方阵、圆阵、疏阵、数阵……等，见《十阵》），提出不同的战术。他明确提到以寡胜众、以弱胜强之处有十几个地方，他主张避开敌人的锋芒，即所谓“让威”，除了激励自己的士气、严明法令、团结士卒、示弱于敌、使敌军傲慢、迷惑、懈怠、疲劳之外，最重要的是“能分人之兵”，“营而离之，我并卒而击之。”围魏救赵就是这种对策论思想的光辉战例。

《史记·孙子吴起列传》记载，田忌“数与齐诸公子驰逐重射。孙子见其马足不甚相远，马有上、中、下辈，于是孙子谓田忌曰：‘君弟重射，臣能令君胜。’田忌信然之，与王及诸公子逐射千金。及临质，孙子曰：‘今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君中驷与彼下驷。’既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金。”这个闪耀着智慧之光的故事，在中国历史上几乎是老幼皆知，其中蕴含的思想，正是在《孙膑兵法》中所充分论述的，表达了对策论的基本原理。参加对抗赛的有两方，每方各有马三等，但每次派哪一等马出场参赛以迎战对方，却只有有限种选择方式。经过不复杂的排列可知，可以采取的不同策略共六种。由于齐威王的马每一等都比田忌的强，所以在五种情况下田忌必输无疑，只有孙膑提出的对策才能保证田忌取胜。这是一种优化对策，叫做“二人有限对策”的最佳方案或制胜方案。

在古代，外国也不乏有对策论思想，但是，“查阅历史，对策论的始祖却是我国著名的军事学家孙膑。”[①] 这是对孙膑所作贡献的恰当评价。

第三节　《墨经》中的数学

1. 墨翟、墨家、《墨子》与《墨经》

墨子，名翟，春秋末战国初[②] 鲁国人，[③] 中国伟大的思想家、政治家，同时又是一位具有严谨科学思想的学者，对自然科学如力学、光学、几何学等有独到的观察与研究，因而他是中国历史上第一位大科学家。

《史记》未给墨子立传，仅在《孟子荀卿列传》中附记二十四字：“盖墨翟宋之大夫，善守御、为节用。或曰并孔子时，或曰在其后。”墨子生活的年代晚于孔子而早于孟子（约前 372～前 289）。“墨子学儒者之业，受孔子之术，以为其礼烦扰而不悦，厚葬靡财而贫民，久服伤生而害事，故背周道而用夏政。”（《淮南子·要略训》）他不满儒家礼教，另立新说，主张兼爱非攻，提倡勤劳节用，提出“尚贤”、“尚同”的政治主张，认为“官无常贵，民无终贱”，特别注重艰苦实践，崇尚实验方法，“以绳墨自矫而备世之急”。他的思想代表了当时平民百姓和社会中层的愿望，有深厚的社会基础，所以广为流传。

墨子是墨家学派的创始人。他曾周游列国，仕宋为大夫，尝

① 梁宗巨. 孙膑与对策论. 见：世界数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1980. 498

② 墨子生卒年代今不可考。各学者的看法如下：前 498～前 418，前 490～前 403，前 480～前 390，前 480～前 420，前 479～前 381，前 478～前 392，前 468～前 376，前 468～前 388. 一般认为墨子享有 80 岁以上高寿。

③ 一说为宋人，为宋恒公之子目夷（墨胰）的后人，常住鲁国。

止鲁阳文君之攻郑，绌公输般以存宋，从齐出发步行十日十夜赶到楚都止楚攻宋。在中国历史上这些都成为家喻户晓的故事，是他率领学生创造出的政绩。《韩非子·显学》说："世之显学，儒墨也。儒之所至，孔丘也。墨之所至，墨翟也。"墨子是与老子、孔子并称的哲学家，直到秦始皇统一中国前，墨家作为显学一直保持着它的影响。

墨家学派具有坚强的组织和严格的纪律，有并非世袭的领导者"巨子"相传的制度①，墨家学者义重如山②，大公无私③，勇敢无畏④，勤生薄死以赴天下之急，的确和儒家学者具有完全不同的作风。墨子去世后，墨家分成三派：相里氏、相夫氏、邓陵氏各为一派之首，"取舍相反不同而皆自谓真墨"。(《韩非子·显学》)《庄子·天下》也说："相里勤之弟子、五侯之徒、南方之墨者，苦获、已齿、邓陵子之属，俱诵墨经"，沸沸扬扬，极盛一时。

《墨子》，书名，凡十五卷，旧本题宋墨翟撰。《汉书·艺文志》著录《墨子》71 篇，宋以来只存 53 篇。其中第四十至四十三《经上》、《经下》、《经说上》、《经说下》4 篇总称《墨经》，"经说"是对"经"的注解。另外，第四十四、四十五《大取》、《小取》两篇讨论名辩之学，与《墨经》性质相近，这 6 篇又称为《墨辩》。

《墨经》4 篇有的学者认为主要是墨翟自著，有的学者认为是经他的弟子的笔记整理而成，一般认为经上下（1 920 字）属于墨子的思想，经说上下（3 740 字）则出自后世墨者手笔。因此说该书是墨翟与他的弟子的集体著作，大抵是恰当的。修成的时间，约

---

① 郭沫若. 青铜时代. 北京：人民出版社，1954. 225

② 《吕氏春秋·上德》记巨子孟胜及弟子 183 人为阳城君守国至死不降事。

③ 《吕氏春秋·去私》记腹䵍杀子以从家（墨家）法事。

④ 陆贾. 新语. 称墨者"赴火蹈刃，死不旋踵"。

在公元前400年到前240年这个阶段。

按照《墨经》的体例，《经上》100条，《经下》82条，《经说上》、《经说下》与之每条相对应（但少10条），总共5 660字。例如《经上》是这样开始的：

> 故所得而后成也止以久也体分于兼也必不已也知材也平同高也虑求也同长以正相尽也知接也中同长也恕明也厚有所大也仁体爱也日中缶南也……（共527字）

同样地，《经说上》与之相应的注解为：

> 故小故有之不必然无之必不然体也若有端大故有之必无然若见之成见也体二之一尺之端也知材知也者所以知也而必知若明虑虑也者以其知有求也而不必得之若睨知……（共1 393字）

由于年代久远，《墨经》传本错简及误钞之处不少，加以文辞简约，意义深奥，在古籍中是一部难读、难校的书。但是，它的内容包含哲学、政法、经济、教育、辩学、逻辑、数学、物理等，还有与名家争鸣的见解，仅科学思想而言，与近代的某些观点不无切合之处，在先秦古籍中，《墨经》当首屈一指，以较大篇幅精辟论述自然科学的诸多道理，所以吸引了许多学者进行研究[①]。诸学者广征博引，考订注疏，各条解释互有异同。这里只能就《墨经》中的数学思想作一概述。注家校改处用括号标明，不再一一叙述出处。

① 如孙诒让《墨子闲诂》、梁启超《墨经校释》、谭戒甫《墨辩发微》、《墨经分类译注》、高亨《墨经校诠》、任继愈《墨子》、詹剑峰《墨子的哲学与科学》、方孝博《墨经中的数学和物理学》以及钱临照、曾昭安等的有关论文。本文主要参考谭、詹、方、曾诸家说中的数学内容。

2.《墨经》中的算术和几何知识

(1)〔经下 59〕[①] 一少于二而多于五，说在建住（位）。

〔经说下〕一：五，有一焉；一，有五焉；十，二焉。

译文：一比二少而比五多，要看这枚算筹立在哪个位置上。个位上的五中是有一的，十位上的一中却有五，即十中有两个五。

解说：本条阐明筹算的十进位值制。

(2)〔经上 60〕倍，为二也。

〔经说上〕倍：二尺与尺，但去一。

译文：倍是自身乘以二。如所得的二尺反求自身，只要减去一尺即可。

解说：本条阐明乘法与加减法的关系。

(3)〔经上 52〕平，同高也。

〔经说上〕谓台执者也。若弟兄。

译文：所谓两直线相平，就是两线间的高都相等。就好像身材相同的两兄弟所抬的物体与地面相平一样。

解说：本条亦可解为两平面平行的条件。

(4)〔经上 53〕同长，以正（正）相尽也。

〔经说上〕同：楗与狂（框）之同长也。

译文：所谓两物同长，就是两物之长正好重合。就好像柜门的直木与门框之高等长一样。

解说：据《说文》，门闩横者曰关，直者曰楗。本条给出两线段相等的定义。又，经文亦可读作“同，长以正相尽也。”

(5)〔经上 54〕中，同长也。

〔经说上〕中：心。自是往相若也。

译文：所谓线段的中点，就是到两端长度相同的一点。它是

① 本条及以下所引《墨经》条目的顺序编号依：谭戒甫. 墨辩发微. 北京：中华书局，1964

线段的中心，从这一点往两端距离相等。

解说：本条亦可解为对称中心。又，经说亦有写作“心：中。自是往相若也。”

(6)〔经上58〕**圜，一中同长也。**

〔经说上〕**圜：规写支（交）也。**

译文：所谓圆，就是到唯一的中心距离都相等的图形。圆是用规画出的、始终两点相交的图形。

解说：本条所给圆的定义与到定点距离为定值的点的轨迹（或集合）等价。为与上条区别，指明用圆规作出的是这种特定的封闭曲线。

(7)〔大取〕**小圜之圜与大圜之圜同，……**

解说：“大取”此条与上条相呼应，是说圆径不论大小，作出的小圆或大圆都满足上条的定义，或它们都是相似的。

(8)〔经上59〕**方，柱隅四讙（权）也。**

〔经说上〕**方：矩见（写）支（交）也。**

译文：所谓方，就是边和角皆四正之形。方是用矩画出的、始终两点相交的图形。

解说：方形的四边即四柱，四角即四隅，“讙”是“权”的假字，作“正”解，四边相等且正交，四角相等，即为四正之形。

经上58、59两条是针对名家“矩不方，规不可以为圆”的论断所作的驳论。

(9)〔经上55〕**厚，有所大也。**

〔经说上〕**厚：惟无所大。**

译文：所谓体积的厚度，必然有一定大的面积存在。但只说厚度时，则不论及这个面积。

解说：本条原文较为费解，各家注释出入较大。这里的译文顺着原文文意，认为经与经说并不矛盾。《墨经》将厚或高抽象出来，论述了它在体积中与面积相依存又相独立的关系，说明《墨

经》几何已从二维平面扩展到三维空间。

(10)〔经上 65〕盈，莫不有也。

〔经说上〕盈：无盈无厚。

译文：所谓物体的容积，充满了该物内涵的空间。如果没有了容积，也就没有了体积。

解说：本条从物体内容空间阐发容积与体积的关系。承上条，厚度既以面积的存在为前提，则厚也就可以看成体积。容积与体积是从不同的角度来看物体，这里强调的是它的内涵。经说在"无盈无厚"后有"于尺无所往而不得，得二。"一些注家认为不属本条，认为属于本条者亦难予以确解。

(11)〔经上 67〕撄，相得也。

〔经说上〕撄：尺与尺俱不尽，端与端但(俱)尽。尺与端，或尽、或不尽。坚白之撄相尽，体撄不相尽。

译文：所谓"撄"，就是互相吻合为一。直线与直线相交，彼此都不能包含；点与点相叠，彼此恰能合一。点与直线相接，点合于线，但直线却不能被占满。石质之坚与石色之白能相合于一体，而两个质体却不能复合为一。

解说："撄"，动词，原意为逼近、接触，这里解作相交、重合、复合。在经中撄是作为名词来定义的，"坚白之撄"的"撄"也是名词，意思是该动作的一种结果：合而为一。"尺与尺俱不尽"不应解作长短不等的两条线段重合[①]，因那样做的结果是"或尽、或不尽"，不是"俱不尽"，所以解作两直线相交为妥。名家公孙龙在《坚白论》中认为坚白这两种物性不能并存于同一石中，《墨经》在本条里顺便予以驳斥。本条讨论点、线、体等相互位置关系的一些方面，如相交、重合、复合、包含等，与上条内容相关而又作发挥。

---

① 谭戒甫. 墨辩发微. 北京：中华书局，1964. 149

（12）〔经上 68〕似（仳），有以相撄，有不相撄也。

〔经说上〕仳：两有端而后可。

译文：同类图形相比，有的互相重合，有的不相重合。图形相比，须各有起止端后才能进行。

解说：仳即比较。经下有句“异类不仳”，显然比较应在同类图形中进行；另外它们需是有限的，无限大的图形无法相比。本条承上条进一步阐发两形全等、不全等以及相比的条件。

（13）〔经上 69〕次，无间而不撄（相）撄也。

〔经说上〕次：无厚而后可。

译文：同类图形叠合相比时所谓“次”者，本身没有区域不被占满，两者却不能重合为一。叠合比大小，须在平面上才能进行。

解说：本条原文较为费解，各家注释出入较大。“次”从欠，偏旁的“冫”从二不从冫，《说文》注：“不前不精，居次之意”。本条承上两条，利用仳和撄的概念，讨论平面图形面积大小的问题，提出用叠合法作为判别法，注意使所比图形没有任何部分处在另一图形边界之外，如果不能重合为一，就可以确认面积居次者。由于经上 67 没有涉及平面图形，本条则详加讨论。关于“无间”含义可参阅下文经上 62、63 条。

3.《墨经》中的集合和区间概念

（14）〔经上 2〕体，分于兼也。

〔经说上〕体：若二之一，尺之端也。

译文：作为部分的“体”是从作为集合的“兼”中划分出来的。这种部分的例子，如两个中的任一个，又如直线中的任意点。

解说：本条通常解为部分与整体的关系。然而须注意它的两例，“二之一”不确指二中的哪一个，“尺之端”也不确指线中的哪一点，甚至不确定只有一点。如果把线看成整体，据当时的知识，点或一些点作为部分就变得特殊且可疑：因它无长度，经上

61 和经下 60 已阐述得十分清楚；而当时还没有将无穷多点积分成线段的概念，点或一些点作为部分，不能凑成线段，得到部分不能合成整体的结论，即体分于兼而不能合于兼，直接与本条矛盾，也与下条不合，将“兼”解为整体与原著原意相左。因此，这个“兼”实际上指的是“集”。按“兼”的原意是并、合、累积，并无完整、整体之意。而“集”原为象形字，意为“群鸟在木上”[①]，引申为聚、合、会的意思。数学名词“集合”即用此意，在古文字学上和“兼”也是相通的。本条所举两例“二”与“尺”，恰恰是有限集合和无限集合，不能认为仅为巧合；而其中的部分“一”和“端”，又恰恰是元素或子集。如果今天讲这两类集合时举出这两个例子，也是恰当之至、精妙绝伦的。

(15)〔经上 45〕损，偏去也。

〔经说上〕损：偏也者，兼之体也。其体或去或存，谓之存者损。

译文：所谓集合有缺损，是从集合中去掉“偏”形成的。所谓“偏”，就是集合中的部分。集合的部分或者被去掉，或者存留；对于存留的部分而言，就叫做“损”。

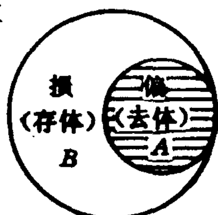


图 2・4・7

解说：本条利用集合“兼”与子集“体”的基本概念进一步定义“损”与“偏”。(图 2・4・7)“偏”是被减去的子集即“去体”，记作 A；“损”是减后所余的子集即差集“存体”，记作 B；这时原集合“兼”又被赋予全集的意义，记作 E。于是本条所论豁然贯通，完全不是在那里作无聊的概念游戏，而是进行了一种有重要意义的集合运算：$E\setminus A=B$。比较今天的集合

① 《说文》注.《禽经》：“独鸟曰止，众鸟曰集”。《诗经・周南》“黄鸟于飞，集于灌木”。《唐风・鸨羽》“肃肃鸨羽，集于苞栩”。

论有关论证方式，它们是多么相似！译文中并未将“体”译作子集，因上条例之二将点作“体”解，可认为亦是元素，故将“体”译作部分，也不与子集或元素相矛盾。

（16）〔经上 62〕有间，中也。

〔经说上〕有闻（间）：谓夹之者也。

译文：所谓“有间”，就是被限定的中域。该域指的是包括边界的“夹之者”。

解说：本条的“中”与经上 54、58 条的“中”意义不同，这里指的是线的区间或面的区域。在数学里“域”作“界”讲（这里不是指群环域之域），对一维二维的边界均可用，例如“值域”指的就是某区间。译文里的“中域”兼顾中段、中区两解。根据下条“尺……不夹于端与区内”，说明端是“夹之者”，只是边界，并无体积，因此将“夹之者”视作有体积或宽度的解释似与原著原意相悖。显然，“有间”、“夹之者”指的正是集合论中的闭集；对照经上 64 条，又知它是真集。

（17）〔经上 63〕间，不及旁也。

〔经说上〕闻（间）：谓夹者也。尺前于区穴而后于端，不夹于端与区内。及（不）及：非齐之及也。

译文：所谓“间”，就是不涉及边界的中域。该域指的是不包括边界的“夹者”。线作为周界处在所夹区域的前沿，而作为被夹者又处在区间始端的后面，但它不会作为被夹者处在端点与区域这两类边界的中间。所谓“不及”，就是达到了但没有包含的“非齐之及”。

解说：“夹者”即所夹者或被夹者。“夹”指限定，未必单指从两个方面限定。上条“夹之者”原指边界，添入“夹者”即为“有间”。两条对举，严格定义了“间”与“夹者”，恰是集合论中的开集。“尺前于……区内”一句解释较多，如点线面三者线排在面的前而在点的后边；点动成线、线动成面或集点成线、集线成

面之类，《墨经》原来有无这些命题姑且不论，就是从文意上推敲与本条所论关涉也不大。这些解释与“夹”字均无关，似应将全句作统一考虑：尺夹区于前而夹于端之后，不夹于端与区内，则所论豁然贯通。“区穴”一解作“区内”，指平面区域，作为整体（而非其中之一点）显然不能成为线段的边界。末句“及及：非齐之及也”，亦有多解：“及，乃非齐之及也”[①]，或“及及（尺尺）非齐之，及也”[②]，当成“及，不是齐等之义”[③]，或“言线非平行则相交”[④]。前者于理不通，后者与本条相去过远。本文认为“及及”系“不及”传抄之误，本来是为经上“间，不及旁也”中的“不及”作注，这个“不”字也同下文的“非”字相呼应。所谓“及”，即指连界在内的“齐之及”。所谓“齐”，应是与边齐并包含边界的。这里精确地解释了“不及旁”就是可以达到边界但不包括边界，全条文意浑然一体，无懈可击，对开集“间”的内涵阐发无遗。

（18）［经上 64］*纑，间虚也。*

［经说上］*纑：虚也者，两木之间，谓其无木者也。*

译文：所谓“纑”，就是空虚的中域。所谓空虚，如两木的中间，指的是无木的区域。

解说：“纑”原意为麻缕，何以在此作“间虚”解，众说纷纭。一说，当作“栌”，即斗栱，柱顶上承托栋梁的方木。由于下文接着举“两木”的例子，两栌之间无木，即间虚。这样解释还较平顺。本条将中空的区域定义为“纑”，可以解释为集合论中的空集，与之相对应的“间”，自然就是真集了。应当指出，“间”不是空

---

① 谭戒甫．墨经分类译注．北京：中华书局，1981．46

② 高亨．墨经校诠．北京：科学出版社，1958．68

③ 谭戒甫．墨经分类译注．北京：中华书局，1981．46

④ 高亨．墨经校诠．北京：科学出版社，1958．68

隙[1]，而是区域，有物时称做“间”，无物时称做“间虚”或“纑”，因此“纑”是“间”的特例，犹言无元的真集（比较：曲率为零的曲线即直线，交集为空的相交即不相交等），称“纑不能叫做间”[2]，与原文相牴牾。另外，“间”与作为边界的“夹之者”之间不应当有空隙，即不应相离[3]，由于经说对“不及”已作说明，“不及”不指相离。如果“夹者”与边界间有了空隙，那么就成“间虚”了，于是定义“间”与“有间”又以“间虚”为前提，造成定义概念的恶性循环，为逻辑学中大忌。这是理解、表述不确引起的，并非《墨经》原意。

以上三条，纵横论说，一气呵成，诚如曾昭安所评：“西人的集论在 19 世纪后期康托尔方才发现，我国人则两千多年前已有那种思想，可想见其严正缜密达到怎样的惊人的程度！”[4]

4.《墨经》有关无穷和极限的概念

《墨经》中有穷、无穷、无穷大、无穷分割和极限的早期概念在属于自然哲学、数学、伦理等类条目中有所表述：

(19)［经上 41］穷，或有前不容尺也。

［经说上］穷：或不容尺，有穷。莫不容尺，无穷。

译文：所谓“穷”，就是当用尺去度量区域时所遇到的“前不容尺”的情况。这时连一尺也容不下了，就叫做“有穷”。不论怎样度量总遇不到这种情况时，就叫做“无穷”。

解说：“或”即域。“尺”在本条中作单位长度解，不作直线解，因直线长度为无穷，截面为零，把“前不容尺”当成“前不

---

① 方孝博. 墨经中的数学和物理学. 中国社会科学出版社，1983. 13，称“间犹言空隙”。

② 方孝博. 墨经中的数学和物理学. 中国社会科学出版社，1983. 14

③ 方孝博. 墨经中的数学和物理学. 中国社会科学出版社，1983. 13，图二（甲）及说明文字

④ 方孝博. 墨经中的数学和物理学. 中国社会科学出版社，1983. 14

容线”时，无论此线纵放横放都讲不通。度量空间之所以遇到“前不容尺”的情况，就是因为遇到了边界。该域有界，自然有穷。反之，该域无界，而且是在任意方向上均无界，自然无穷。本条实质上是以能否进行无限次度量作为判定有穷与无穷的标准的。

(20)［经上 43］始，当时也。

［经说上］始：时，或有久、或无久。始当无久。

译文：所谓“始”，正对应着时间的某一瞬。时间或者是永恒的延续，或者是没有延续的一瞬。“始”正对应着没有延续的一瞬。

解说：上条讲空间的有穷与无穷，本条论时间的短暂与永恒。“始”是计算时间的起点，本身并不占有时间。“久”表时间的延续，据经上 39 条：“久，弥（包括）异时也。久：合古今旦莫(暮)”，既合古今，又包括不同时间，故为永恒的延续，即时间的无穷。又据经说下 63 条：“久，有穷无穷”，表示时间的延续既可以是有界的，又可以是无界的。

(21)［经下 73］无穷不害兼，说在盈否。

［经说下］无：“南者有穷则可尽，无穷则不可尽；有穷、无穷未可智，则可尽、不可尽亦未可智；人之盈之否未可智，而必人之可尽、不可尽亦未可智。而必人之可尽爱也，谆。”人若不盈无穷，则人有穷也。尽有穷，无难。盈无穷，则无穷尽也。尽有（无）穷，无难。

译文：关于无穷的理论与关于兼爱的主张并不矛盾，因人类能否住满天下兼爱说都对。有人说：“南方有穷就可以无所不至，无穷就不能够无所不至；现在连南方有穷、无穷还不知道，那么能不能够无所不至也就无法得知；人类能否住满南方还不知道，那么人类总数是否一定能数尽也就不能得知。于是，一定要遍爱天下人类的说法就荒谬了。”其实，人类如果不能住满无穷的天下，那么人类的总数是有穷的；数尽有穷的数目，一点儿困难也没有。

人类如果住满了无穷的天下，那么无穷多的人数也是可以尽数的；数尽无穷多的数目，也没有什么困难。

解说：所谓“兼”，即“兼爱”，与经上 2 的“兼”不同义，它是“遍及”的意思。“盈”即充满。“智”通“知”。古人认为南方是无穷的，但辩者认为也可以有穷。本条系“难者诘墨家之辞”和“墨家答难者之辞”[①]。诘难者提出“无穷则不可尽”，与辩者的“尺棰”命题对无穷的理解均属于潜无穷大，由此可知，这段堂皇的议论，可能出自名家，本条则为名墨之辩。《墨经》用了一个二难推理来反驳难者：[②] 不论人类能否住满无穷的天下，人类总数都是可以尽数的，因而兼爱天下人是不难做到的。这里，《墨经》进一步提出了实无穷的概念，无穷可尽，可作为一个能够完成的现实整体来认识和处理。墨家以无穷可尽驳难者“无穷不可尽”，所谓“尽”，对空间而言，就是无所不至；对数目而言，就是凡数都能数到。但是，本条却没有讲该怎么去数无穷多的数目，于是，难者又提出了诘难。

(22) [经下 74] 不知其数而知其尽也，说在明（问）者。

[经说下] 不：“二（不）智其数，恶智爱民之尽文（之）也？或者遗乎？”其问也，尽问人，则尽爱其所问。若不智其数而智爱之尽文（之）也，无难。

译文：不知道人类的确切数目，却知道所有的人都被数到，由于使用了问一个数一个的方法。那人又问：“你不知道人类的确切数目，你怎么能知道爱遍了天下的百姓呢？要是有遗漏你能知道吗？”其实，你问一个人，就数一个人，一个个问下去，直到所有的人我都爱。即令不知道确切数目，但是知道所爱的已是所有的人，这是没有什么困难的。

---

① 高亨．墨经校诠．北京：科学出版社，1958．195～196

② 孙中原，栾建平．《墨经》的无穷说．中国哲学史研究，1987．41

解说："智"同知。承上条，难者提出了两个尖锐的问题，从数学上来说就是怎样认识无穷大（它与有限数的差别）以及怎样达到无穷大。墨家认为无穷多的数目不像有限数那样可以确知，但是只要能把它们排成一个序列依次去数，纵有无穷多也可以尽数，只要掌握了这种方法，就达到了无穷大。今天在数学和逻辑学中为证明公理化命题演算系统的广义完全性所应用的正是这种方法。[1] 不能认为墨家在论战中所闪耀的思想光辉与现代方法的这种一致性仅属巧合。特别是当从集合论的观点来考察时，本条所假设的无穷多人的集合属于可数集或可列集，正是最基本的自然数集，能否排序是是否可数的充要条件。

(23) [经上 61] 端，体之无序而最前者也。

[经说上] 端：是无同也。

译文：所谓"端"，就是物体中不能排成序列的点中最前面的一点。物体中任一点与此点都不相同。

解说：本条有多种解释。一说，"序"字为"厚"字之误，已知厚作大小解，于是本条即为单纯的几何点。一说，"同"字为"间"字之误。其实，原文无误，"无序"与"最前"也不矛盾。这里的"序"，是排成一列的意思，人是可以排成一列一个一个去数的，而"体"中的点却不能排成一列一个一个去数。从集合论的观点来看，包含点的"体"是体积、面积或者线段，属不可数集或不可列集；虽然不能排成序列，但却必有这样的一点，例如线段的端点，处在最前或起始或边界的位置，任一点的位置不与它相重。

(24) [经下 60] 非半不𣂪则不动，说在端。

[经说下] 非：𣂪半：进前取也，前则中无为半，犹端也；前后取，则端中也。𣂪必半，毋与非半，不可𣂪也。

---

① 孙中原，栾建平.《墨经》的无穷说. 中国哲学研究，1987

译文：线段无穷半分终极时则达于确定位置，即是端点。取中法：不断进前取中，前边终究会出现无半可取，这就是达到了端点；不断前后取中，终极则达于线段中点。每次都一定要取中，不要取到非中点处，那样就不能用取中法了。

解说："斱"，斫、破、分割。"斱半"，分割一半，或取半或弃半，即半分，亦取中。"非半不斱"即"斱必半"，又有每斱必半之意。"不动"指半分过程终止于确定位置。"端中"犹言端之中者，即线段中点。关于进前取中与前后取中的两种方法如图2·4·8所示。进前取每次所达中点用 A_n 表示（$n=1, 2\cdots$），前后取每次所达中点用 B_n 表示（$n=1, 2\cdots$）。把 MN 看作 [0, 1] 区间，用数字来表示 A_n、B_n 的准确位置，可得无穷级数：

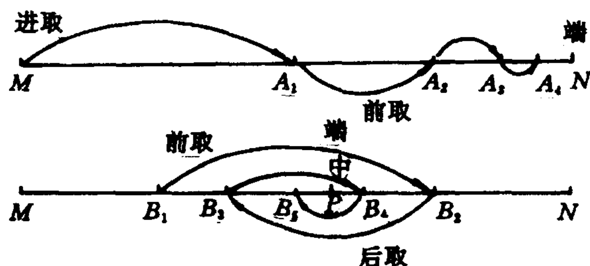


图 2·4·8　斱半图：A 进前取 B 前后取

$$\{A_n\}=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ \frac{15}{16},\ \frac{31}{32},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^n},\ \cdots$$

$$\{B_n\}=\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \frac{9}{16},\ \cdots,\ \frac{2^n-1}{2^{n+1}},\ \frac{2^n+1}{2^{n+1}},\ \cdots$$

由极限论易知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

就是说，进前取中法达到的极限是位置在1处的端点 N，前后取

中法从左右两个方向达到的极限是位置在$\frac{1}{2}$处的“端中”P。经过上面的分析，可以肯定地说，《墨经》中已具有这样的清晰、准确的极限概念。在名家的“尺棰”命题里，虽经无穷分割的过程，但却没有指出能否以及是否达到了最终的极限；墨家却认为无穷分割在严格规定的取中法条件下同时又是无穷逼近，极限是存在的并且完全能够达到，所举两例简直是精彩之至，今天全世界的数学教师在讲极限论时都绝不会忘掉这两个例子。

关于无穷分割中出现的“无为半”引起了严重的误解，认为这种“不可再分”的思想“在空间上否定了无穷小的存在”，“《墨经》用常识的观点来解决属于抽象理论思维的问题，把空间看作只是有穷单位的机械相加，割裂了有穷和无穷之间的辩证关系，从而陷入了形而上学。”①在作出如此沉重的宣判之前是否可以先讨论“无为半”的内涵。在名家对潜无穷大进行无穷分割时，当然永远不会出现“无为半”的情况，因为着眼点总在过程之中；而墨家对实无穷大进行无穷分割时，将着眼点立于过程的终极，即已经达到了的极限，这时所说的“无为半”，已不在过程之中，是完全正确的。可竭不可竭即是能否达于极限，从数学上看，关系到能否上升为极限论，《墨经》恰恰在这一点上高出一筹。假如总在一分为二中兜圈子，数学的进步也就无从谈起了。

当然，《墨经》的极限概念属于早期的，并没有建立在无穷小分析的基础之上；名家惠施“至小无内，谓之小一”的无穷小概念，也决不是分析学中的“ε—δ”，因此，不知“《墨经》在空间上否定了无穷小”为何指。另外，现在分析学中并非仅用取半法逼近极限点，可以有任意多种的形式，当然也不能以此去苛求古人了。

---

① 孙中原，栾建平.《墨经》的无穷说. 中国哲学研究，1987

曾昭安说:“这条解释极限的道理，极正确明显，树立后世解析几何学的基础。在西洋和墨翟同时有希腊人芝诺(公元前490～前430年)创‘会跑人阿溪里追赶乌龟’说，好像含有‘无穷’的概念，但因他不明白‘极限’的意义，故所得的结论完全陷入诡辩，丝毫不合情理，直到1655年瓦利斯著无穷算法，才有‘极限’概念的正确解释，却已后于我国一千一百多年了。”①

① 曾昭安. 中外数学史. 第一编下册. 武汉大学讲义. 1956. 396

第五章　工程技术与《考工记》中的数学

先秦时期由于生产和战争的各种需要，以及其他方面的实践活动的推动，工程技术有了发展，作为工程技术规格手册《考工记》也出现在这时。在这些工程技术和《考工记》中包括不少数学或与数学有关的内容，是当时数学广泛应用的一个重要方面。本章将对此进行较系统的讨论。

第一节　《考工记》中对数学的应用

1. 关于《考工记》

《考工记》是我国最古老的一本记录技术与工程知识的汇集。这本书通常是收编在《周礼》之中，因而得以流传至今。汉初购求书籍，当时的《周礼》已有损佚，存有《天官》、《地官》、《春官》、《夏官》、《秋官》五篇，缺少《冬官》一篇，于是河间献王就把《考工记》当作《周礼》的一部分补进去。唐杜牧说："《五官》体制皆同，而《冬官》以《考工记》补之，又自一体，不特为周制，尽记古百工之事，……三代制度皆在此，但书不全矣……"[①] 从书中所反映的内容以及注家训诂的角度来看，一般认为本书的作者是春秋末年的齐国人，[②] 由于全书语气前后不尽一致，

① 唐杜牧注《考工记》卷上第1页，关中丛书．陕西通志馆印，1934

② 彭祖钤．漫话《考工记》．《光明日报》，1961．8．5．又，李约瑟．《中国科学技术史》第一卷第二分册参考文献中把《考工记》列为汉代著作。见该书570页。又，闻人军．《考工记》中的流体力学知识．认为《考工记》战国初期成书。见《自然科学史研究》第3卷第1期1页。

内容亦有重复之处，故可能并非出自一人的手笔，而是一些知识分子考察百工制度的记录。又有人说书中详细记载了制车的标准，但没有涉及制舟的方法，认为是西北地区的人所作，这种推测可备参考。

《考工记》包括了当时手工业主要工种和营建的项目，正如该书开始部分所说："凡攻木之工七，攻金之工六，攻皮之工五，设色之工五，刮摩之工五，搏植之工二"，共30个工种，对制造工艺与技术规范作了详尽的记录。例如对车、耒等运输、生产工具，剑、戟、弓、矢、戈等武器，勺、觚、甗、簋、鬲、爵、豆等容器，鼓、磬、钟等乐器都有记述，还有王城、宗庙、明堂、世室的建制与设置。但《考工记》也有散佚，《段氏》、《韦氏》、《裘氏》、《筐氏》、《椰人》、《雕人》等篇，只剩下名目了。

从历史文献和出土文物来看，商代手工业的分工与项目，与《考工记》所反映的非常类似，如舟车木作、铸铜、制革、制陶、版筑、制骨、玉石工艺等。[①]《尚书·酒诰》中所说的"百宗工"，就是为王室管理技术奴隶、生产各种手工业品的"百工"。《考工记》说："国有六职（王公、士大夫、百工、商旅、农夫、妇功），百工居一焉"，也反映了百工在当时社会中类似的地位。商代的百工也叫百姓，盘庚说他们是共同掌管政治的旧人，是邦伯、师长、百执事（百官、百工）之人，因而属于贵族。[②]《左传》定公四年记武王克商后分给鲁公伯禽的殷民6族和分给卫国康叔的殷民7族，13族中至少有9族（如绳工索氏、酒器工长勺氏、陶工陶氏、旗工施氏、篱笆工樊氏等）属于百工的一部分。百工有世传的专门技术，为周人所重视，促进了周朝手工业的发展。在春秋末年所作的《考工记》中反映了这一历史情况："审曲面埶，以饬五材，

① 杨建芳．商代的手工业．历史教学，1964．6．2～9

② 范文澜．中国通史，第一册．第五版．北京：人民出版社，1978．46

以辨民器，谓之百工”。“知者创物，巧者述之守之。世谓之工，百工之事，皆圣人之作也。炼金以为刃，凝土以为器，作车以行陆，作舟以行水，此皆圣人之所作也。”所以，历来认为《考工记》为“周之逸书”，并不是没有根据的。

《考工记》的内容具有四个特点。第一，它密切结合生产实践，具有明显的经验性。例如车轮直径的长短，要看车子的用途：是兵车、乘车或是田车，前者六尺六寸，后者六尺三寸。“轮已崇，则人不能登也；轮已庳，则于马终古登阤也”，即要求车轮高低适中，太高时人上下不便，太低时马拉起来就像总在上坡一样吃力。这种总结是长期制车经验的积累，虽无力学的分析，但已包括了一些朴素的道理。第二，这本书精确地记叙了所造器物的尺度、容量、含量等，具有明显的数量化特点，并指明由于数量的变化而引起所制物品性能的差异。这一点正是下文中所要深入讨论的。第三，《考工记》不仅仅是手工业技术规范的总汇，它还对若干技术环节进行了科学的概括，力图阐明其内在的科学道理①，具有一定科学性。例如它指出钟声的来源系由于钟的振动所致，用今天的话说，钟声的频率高低、音品与钟的厚薄、形状、大小以及合金成分有关，为制造合用的钟提供了理论上的依据。第四，《考工记》对当时手工业和营造技术进行了大量考察，涉及面广，内容丰富多彩，而对一些工种记述全面细致，具有完整性与多样性相统一的特点。因此，可以认为，《考工记》是我国古代（至迟公元前四世纪）技术科学的第一部经典著作，在中国科学技术史上占有重要地位，在当时世界上也是首屈一指的，是数学史、物理史、化学史、兵器史、工具史、建筑史乃至乐器史、工艺美术史研究的对象。

《考工记》由于列为《周礼》的第六部分《冬官》，历史上引

① 杜石然等．中国科学技术史稿，上册．北京：科学出版社，1982．108

起了一些学者的注意；但它主要是技术性内容，需要有一定的科学（数理化）、技术、历史、古文字知识才能读通，故较之经书而言，研究它的人并不多。

汉代郑众、郑玄注是对《考工记》早期的注记[1]。郑玄凭他的科学知识（尤其是数学知识），所作研究阐明并丰富了原著的科学性，成为此书研究的第一位权威学者。由于注文历史悠久，本身具有重要历史价值，也成为研究的对象。后人能看懂此书，多借重于郑玄注。唐代孔颖达、贾公彦曾为之作疏，后者流传广远，多有新见，影响较大。[2] 诗人杜牧也曾为之作注。宋代王安石撰《周官新义》十六卷附《考工记解》二卷。[3] 明代有吴澄、周梦暘、郭正域、林兆珂、徐昭庆、程明哲[4] 等人的评注，主于评点字句，注释浅略，而对原文无所发明。清代"林学"兴起，《考工记》引起重视，戴震著《考工记图》，[5] 程瑶田著《考工记创物小记》，颇多新见，当时诸家立说，以这两家最为精彩。戴震认为，"立度辨方之文，图与传注相表里也"，过去的礼图失传已久，对于《考工记》中的器物，更没有图流传下来，所以他认真考察出土文物，将书中所记各种物品的形象，绘成57幅图，对于了解古物很有裨益。

---

① 见《四部丛刊初编》经部001《周礼》第十一、十二卷。

② 《四部备要》经部001《十三经古注·周礼郑注》卷39～42有贾公彦疏。中华书局版。

③ 王安石．周官新义．《丛书集成初编》0870．商务印书馆，1937．《四库全书提要》称："安石并未解《考工记》，而《永乐大典》乃备载其说，据晁公武《读书志》，盖郑宗颜辑安石字说为之，以补其阙。"谨录以备考。

④ （元）吴澄考注、（明）周梦暘有《批点考工记》，见琳琅秘室丛书。（明）郭正域有《批点考工记》一卷；（明）林兆珂有《考工记述注》二卷；（明）徐昭庆有《考工记通》二卷；（明）程明哲有《考工记纂注》二卷。

⑤ （清）戴震．考工记图．见《万有文库》390册。

清代还有阮元[1]和孙诒让，[2]在《十三经注疏》里将诸家见解汇集起来，相当于《考工记》的集注；但卷帙浩繁，翻查亦有不便。及至近现代，除少数论文外，至今对《考工记》尚没有专著用现代科学技术的观点作全面整理与系统研究。作好这项工作显然是中国科学技术史研究的一个不可缺少的环节。

2.《考工记》中的实用数学

《考工记》卷首部分可称为总序，第一部分叙述制车的《轮人》、《舆人》、《辀人》（以及《车人》）有关的技术与工艺，第二部分记叙"攻金之工"的《筑氏》、《冶氏》、《桃氏》、《凫氏》、《㮚（栗）氏》，这里主要围绕这两部分内容，结合上文已提到的该书的数量化的特点，讨论书中是怎样将当时的数学知识应用于工艺实践的。

（1）兵车的武器配备：《考工记》称："车有六等之数"，指车上士兵与武器的配置，按高度分作六等：

等次	名称	自　高	公　差	距地高
一等	车轸	四尺		四尺
二等	戈柲	六尺有六寸	崇于轸四尺	八尺
三等	人长	八尺	崇于戈四尺	十二尺
四等	殳长	寻有四尺	崇于人四尺	十六尺
五等	车戟	常	崇于殳四尺	二十尺
六等	酋矛	常有四尺	崇于戟四尺	二十四尺

原著首先说明了为什么"车轸四尺"。"六尺有六寸之轮，轵

---

① 《四部备要》经部004《十三经注疏·周礼注疏》39～42卷有阮元的集注。中华书局版。

② 《四部备要》经部008《十三经注疏·周礼正义》74～86卷有孙诒让的集注。中华书局版。

崇三尺有三寸也，加轸与轐焉，四尺也。”郑注：“轐，谓伏兔也”，“轵，毂末也，此轸与轐并七寸。”按，“轸”（zhěn）是车箱底部四面的横木；“轵”（zhǐ）在《考工记》中可作三解，这里指车轴端，“轵崇”指车轴中线距地之高。“轐”（bū），车箱底板下面扣住横轴的两个横木装置，形如伏兔，上平载舆。这里是说，车轴高度 3 尺 3 寸，加上轴上面的车箱底架和“伏兔”的高度 7 寸，人立于车上，距地 4 尺。其次，“戈柲六尺有六寸，既建而迆”。郑注：“迆，谓著戈于车邪倚也”。“迆”同迤，斜行引申为斜倚，即是说戈非直立于车，可以算出它斜倚的角度（与水平夹角）为 $\arcsin\frac{4}{6.6}=37°18'$。这样放置的戈高于车轸 4 尺。另外，使用了现已废弃了的两个长度单位“寻”与“常”。郑注：“八尺为寻，倍寻为常”，即“常”为 16 尺。

于是，轸、戈、人、殳（shū，古代撞击用的兵器，一般为竹制，头上不以金属为刃，八棱而尖）、戟、矛的高度恰成一等差级数，公差为 4。战车上士兵与武器的配置描绘出一幅古代兵车全图。

（2）车轮的总体设计：制作车轮是“轮人”的任务，它又细分为制轮毂、车辐、轮牙三部分，各部分之间的相关比例是制轮须首先考虑的。《考工记》说：“六分其轮崇，以其一为牙围，参分其牙围而漆其二。”这里规定了牙围的尺寸：（圆环）宽度五寸半，两宽为一尺一寸。油漆牙围的 2/3，“不漆践地者也”，（郑注）“椁其漆内而中诎之，为之毂长，以其长为之围”。对这段话，郑玄注文的意思是说，如果除去轮沿不上油漆的一寸[①]，“漆内”总长六尺四寸，折半三尺二寸，作为轮毂之长，并且以这个长度作

[①] 郑玄注说“椁其漆内”是“度其漆之内相距之尺寸”，按照《考工记》原文，“牙围”漆者 $7\frac{1}{3}$ 寸，不漆者 $3\frac{2}{3}$ 寸，“漆内”长度应是 $623\frac{1}{3}$ 分。

为轮毂两头大小周长之和。

为什么轮毂长应取这一数字，为什么轮毂大小头周长之和也取这一数字，似乎并没有特别应予遵循的道理，因而这一规定也并非不可更改的。下文还要讨论原著对轮毂长短利弊的分析，说明实用性是最重要的原则。这一规定只是从总体上对轮毂与全轮的比例以及轮毂大小头的尺寸有一个大体相关的限制，这除了可以认为是来自经验（或取自某次测量结果的偶合）之外，更重要的是受到作者哲学观念的影响：造物是对宇宙的模拟，体现了总体相关性的思想。我们看到，《考工记》在车箱、车盖等的设计中也都贯穿了这种思想。事实上，考察全车的整体构思："轸之方也，以象地也；盖之圜也，以象天也；轮辐三十，以象日月也；盖弓二十有八，以象星也"，不能简单地看作只是受到象数神秘主义的影响；车的盖、轸、轮各部与天、地、日、月各部都是彼此相关的，处在一个协调的系统之中，体现了人的创造顺应自然、并以天地为楷模的思想。

（3）车毂的制作要求：毂，车轮中心的部分，一般为圆木，周围与车辐的一端相接，中有圆孔，用以插轴，使两轮相连。车毂是车轮的关键部位，上文已说明它的长度和两端围长已被确定。具体来说，后者即"五分其毂之长，去一以为贤，去三以为轵。"郑注："贤，大穿也；轵，小穿也。玄谓此大穿径八寸十五分之八，小穿径四寸十五分之四。大穿甚大，似误矣。大穿实五分毂长去二也。去二则得六寸五分寸之二。凡大小穿皆金（铜）也。今大小穿金厚一寸，则大穿穿内径四寸五分寸之二，小穿穿内径二寸十五分寸之四，如是乃与数相称也。"

郑玄注纠正了《考工记》原文一个错误，（当为"去二以为贤"），认为应是据毂长的 3/5 作为"贤"——"大穿"，即轮毂向车内一边大头的周长，取 2/5 作为"轵"——"小穿"，即轮毂向车外一边小头的周长。他又补充说，车毂是铜制的，厚度一寸。这

一记录，丰富了原著的内容。

根据郑注和戴震注，车毂数据可列成表：（单位：分）

	毂长	大穿外径	大穿内径	小穿外径	小穿内径
郑玄注	320	64	44	42.67	22.67
戴震注	320	61^{+}	41^{+}	40.75^{-}	20.75^{-}
今算值	311.67	59.52	39.52	39.68	19.68

郑注入算用古率，戴注入算用密率。今算取整大小穿内外径依次是6寸、4寸、4寸、2寸，大概并非仅为巧合。

（4）车毂上轮辐的设置：《考工记》说："参分其毂长，二在外，一在内，以置其幅。"郑玄注："毂长三尺二寸者，令辐广三寸半，[1] 则辐内九寸半，辐外一尺九寸。"这就确定了轮辐在车毂上的位置，辐外的长度是辐内的2倍。中国古代车轮轮毂突出部较长，从考古发掘中可以看得出来[2]，《国策・齐策一》说："临淄之途，车毂击，人肩摩"，表示人车密集，也是毂突明显的旁证。但毂长却非定数，需视用途而异。《轮人》中讨论了毂"小而长"或"大而短"的利弊。总的原则是"短毂则利，长毂则安"，"行泽者欲短毂，行山者欲长毂"，在车有倾覆的可能时，长毂可提高安全系数。另外，急驰的战车较长的金属毂突对于敌方也是一种威胁。

对车辐的安装及本身的形状也作了数量上的规定：

"凡辐，量其凿深以为辐广，广深相应则固。"即车辐安装在车毂上，穿凿的深度与辐宽相同，这样的比例才能保证车辐的牢固。

"三分其辐之长，而杀其一，则虽有深泥，亦弗之溓（通粘）

---

① 一本作"二寸半"，见《四部丛刊初编》《周礼》卷十一，204页郑注。

② 范文澜．中国通史（第一册）．北京：人民出版社，1978．46（图）

也。”即在靠近轮牙的1/3处，使轮辐渐次缩细，这样做的结果，即令车过深泥，也不易被陷住。

上文已提到“轮辐三十，以象日月也”，《老子》也写着“三十辐共一毂”，看来这是中国古代的通制。圆周30等分（或60°角5等分）将必然成为置辐时遇到的几何问题。根据下文，我们有理由认为，这一问题已被完满解决。

（5）车轮的检查验收：车轮制成后，须经过一整套严格的检验程序；而其标准，又建立在几何学和物理学的知识基础之上。《考工记》说：“凡察车之道，必自载于地者始也，是故察车自轮始。凡察车之道，欲其朴属而微至，不朴属无以为完久也，不微至无以为戚速也。”郑注：“朴属犹附著，坚固貌也”，“微至，谓论至地者少。言其圜甚。著地者微，则易转，故不微至，无以为戚数（疾速）。”

从数学上看，这里提出的“微至”即切触，即相切的早期概念，郑玄对它下的定义是“著地者微”，“言其圜甚”。今天看来，“微至”一词十分贴切。如果车轮是刚体（朴属）并且是几何的（圆甚），地面是理想平面，那么两者必然相切，这是达到易转和疾速的必要条件。

“进而眡（视）之，欲其微至也。无所取之，取诸圜也”，要想达到车轮与地面触点相切，只有保证车轮正圆，轮沿不可出现折线或非圆曲线，这是除以圆作为标准任何别的方法都办不到的。

“是故规之以眡其圜也，萬（通矩）之以眡其匡也，悬之以眡其辐之直也；水之以眡其平沈之均也，量其数以黍，以眡其同也，权之、以眡其轻重之侔也。故可规，可萬，可水，可悬，可量，可权也，谓之国工。”

于是，用圆规来仔细地校准轮子，看它是否正圆；用矩尺密

合于轮面上，看它是否平正；[1] 用悬线对照旋轮的每根辐条，看它是否笔直；把轮置于静水中，看它各方面沉浮是否均衡；精确地测量长度，看它是否相等；再把每部分都过秤，看它们的轻重有什么区别。能够经得起上述六项检验，才能称得起“国之名工”。

事实上，检验车轮是否合格的科学标准，《轮人》概括为“圜者中规，方者中矩，立者中悬，衡者中水”，这是根本的不变易的原则。用规，矩，垂线，水的浮力，尺和秤来严密度量圆、平、直、匀、长和重等几何、物理性质，获得必要的数据，这是保证车轮完美无缺的前提。“毂也者以为利转也；辐也者以为直指也；牙也者以为固抱也。轮敝，三材不失，谓之完。”纵然轮子用坏了，但毂、辐、牙仍保持原有的性质。没有正确的理论和高超的技术是不能作出如此自信的结论来的。

《考工记》对车的舆与盖，桯（tīng，古代车盖柄下较粗的一段）、部、凿、弓、隧各部分都有类似的记述。值得注意的是，这本书给出了一个等比级数：

“六分其广，以一为之轸围；三分轸围，去一以为式围；三分式围，去一以为较围；三分较围，去一以为轵围；三分轵围，去一以为轛围”。设轸围之长为 A，则以下各项是它的 $2/3$，$(2/3)^2$，$(2/3)^3$，$(2/3)^4$ 倍，公比为 $2/3$。我们将在下文中看到，《考工记》还提出了公比为 $3/2$ 的级数，这两种互为倒数的公比，在数学里具有典型的意义。

（6）标准量器的规范：《考工记》中有一节精确描述了当时的量器，这是计量学史的珍贵资料：

---

[1] 一说，“检验时将轮子平放在同轮子等大的平整的圆盘上，视其是否彼此密合”。见杜石然等. 中国科学技术史稿（上册）. 北京：科学出版社，1982. 11. 按：郑玄注引郑司农云：“萬，书或作矩”。用一种旋转矩尺的方法可以确定平面。事实上，“平整的圆盘”仍需用矩来测定。

“桌（栗字的古体）氏为量，改煎金锡则不耗，不耗然后权之，权之然后准之，准之然后量之，量之以为鬴，深尺，内方尺而圜其外。其实一鬴，其臀一寸，其实一豆，其耳三寸，其实一升重一钧。其声中黄锺之宫，槩而不税，其铭曰：‘时文思索，允臻其极，嘉量既成，以观四国，永启厥后，兹器维则’。”

所谓“嘉量”，就是标准量器。一个社会，只要进行生产和交换，就必须有量器；而一个国家，就必须有标准量器，其重要性是显而易见的。现今所有最早的嘉量是“商鞅量”，量器上所刻的铭文表明制于公元前344年，即秦孝公十八年，当时规定1升的容积为$16\frac{1}{5}$立方寸，这和《考工记》所记齐国的容量单位略有出入。[①]齐国容量1钟=10釜，1釜=4区，1区=4豆，1豆=4升，所以1釜或1鬴是64升。嘉量外形为圆柱体，内方容物，两旁有耳，也各为小圆筒形。[②]《九章算术·方田》刘徽注所记“晋武库中汉时王莽作铜斛，其铭曰律嘉量斛，内方尺而圆其外……”说明古代量器的规范是一致的，在本书的有关章节中还要对“律嘉量斛”作进一步的探讨。《考工记》有关嘉量的制造过程、各部规格、检验标准及其重要作用在上面的引文中都作了详尽的记述，希望按照这一立法，使子子孙孙永远使用它，“则此器长用之”，普天之下，四方之国，都不得例外。事实上，这是到秦始皇统一中国后才完成的大事业。

（7）铜锡合金的比例：《考工记》有一段关于合金的比例的记录，非常珍贵，它说：“金有六齐：六分其金，而锡居其一，谓之钟鼎之齐；五分其金，而锡居其一，谓之斧斤之齐；四分其金，而锡居其一，谓之戈戟之齐；三分其金，而锡居其一，谓之大刃之

① 钱宝琮主编．中国数学史．北京：科学出版社，1981．16

② 白尚恕．《九章算术》注释．北京：科学出版社，1983．46

齐；五分其金，而锡居其二，谓之削杀矢之齐；金，锡半，谓之鉴燧之齐。”

这一记录在冶金史和化学史界曾引起热烈的讨论。一种观点认为，“六分其金，而锡居其一，”“金”指青铜，这时锡占合金的1/6，余皆类推。一种观点[①②]认为，这样算的结果与出土实物相比，锡含量在全部6种合金中都偏大。例如郑州商代早期青铜尊铜占91.29%，锡7.1%，铅1.12%，等。因而，这里的关键是对何为合金的认识，也可以说是对“六分其金，而锡居其一”这种分数表示形式的认识。据后一种观点，上面的引文可释为：“赤铜有6种合金，6份赤铜和1份锡所组成的合金是做钟鼎的合金；5份赤铜和1份锡所组成的合金是做斧斤的合金；4份赤铜和1份锡所组成的合金是做戈戟的合金；3份赤铜和1份锡所组成的合金是做大刃的合金；5份赤铜和2份锡所组成的合金是做削杀矢的合金；2份赤铜和1份锡所组成的合金是做鉴燧的合金。”

从分数表达形式上看，“n分其金，而锡居其一”，是说分母为$n+1$，赤铜占$\frac{n}{n+1}$，锡重占熔成合金的$\frac{1}{n+1}$。于是“六齐”成分可列表如下：

青铜器	赤铜	锡	赤铜百分比[③]
钟鼎	6/7	1/7	86%
斧斤	5/6	1/6	83%
戈戟	4/5	1/5	80%
大刃	3/4	1/4	75%
削杀矢	5/7	2/7	71%
鉴燧	2/3	1/3	67%

① 张子高.《考工记》中合金的成分. 清华大学学报，1958（4）：159

② 周始民.《考工记》六齐成分的研究. 化学通报，1978（3）：54～57

③ 张子高.《考工记》中合金的成分. 清华大学学报，1958（4）：159

文献[①]所列举49种古代青铜器（鼎4，斧2，戈12，戟1，剑15，古削2，矢镞3，镜10）实物分析数据大多接近文献[②]的解释。例如，举世闻名的安阳殷王陵司母戊鼎总重875公斤，其中铜占84.77%，锡占11.64%，铅占2.79%。由于古人冶炼时尚不能将铅从锡中区分开来，所以二者应合算，占14.43%，尚有0.8%其他物质。由此我们看到，殷商以来出土的大量工具、兵器、酒器、礼器、盛器、车马饰物等青铜器，展示了青铜时代光辉灿烂的文化，它们都是依当时的冶金理论、按照严格掌握的配方比例冶炼而成的，反映了数学在冶金定量化中的应用，已达到当时世界上领先的水平。

（8）弓箭制作中的数学：和上述类似，有关比例和分数的数学理论，在制造弓箭时也得到了应用。矢人作"兵矢"，以供征战之用，作"田矢"，以供弋射之用；冶氏作"杀矢"，以供田猎之用，箭镞的长短、大小，铤的长短，铁管的设置，都有不同的比例规定[③]；进一步的研究表明，这些数量上的规定，使箭飞行稳定，符合今天流体力学（空气动力学）的原则[④]。

有趣的是，商周等级制也反映在弓箭制造中，《考工记》有一段记载："为天子之弓，合九而成规；为诸侯之弓，合七而成规；大夫之弓，合五而成规；士之弓，合三而成规。"这里涉及到三、五、七、九等分圆周的问题，以便使弓干与之相合。但，在实际上是否严格按此规定佩带武器，是需要进一步考证的。关于古削"合六而成规"的说法就有一些可疑。"筑氏为削，长尺，博寸"，这种用来修削竹简的弯刀，纵然长刃有柄，但它弯曲的角度达不

---

① 周始民.《考工记》六齐成分的研究. 化学通报，1978（3）：54～57

② 张子高.《考工记》中合金的成分. 清华大学学报，1958（4）：159

③ 杜石然等. 中国科学技术史稿，上册. 北京：科学出版社，1982. 112

④ 闻人军.《考工记》中的流体力学知识. 自然科学史研究，第3卷，1984（1）：4～7

到 60°。另外，“弓长六尺有六寸，谓之上制，上士服之；弓长六尺有三寸，谓之中制，中士服之；弓长六尺，谓之下制，下士服之，”新兵用较小型号的武器，这是有可能的。

（9）特殊角的专用名：在制车、磬等器物时，有的部件要求有一定的角度，于是产生了度量一些特殊角大小的单位名称。《考工记》把非直角的角叫做“倨句（jùgōu）”，“倨”是钝角，“句”是锐角。直角叫做“倨句中矩”或简称“一矩”。例如“磬氏为磬：倨句一矩有半”，是指石磬背部的折角其大小是一个直角（矩）再加上半个直角，即 135°。[1]

在车辆制造中一些构件的角度大小取了专用的名称：“车人之事，半矩谓之宣，一宣有半谓之欘，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬折。”角度的大小相当于：

$$1\text{ 宣}=\frac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$$

$$1\text{ 欘}=45^\circ+\frac{1}{2}\times 45^\circ=67^\circ30'$$

$$1\text{ 柯}=67^\circ30'+\frac{1}{2}\times 67^\circ30'=101^\circ15'$$

$$1\text{ 磬折}=101^\circ15'+\frac{1}{2}\times 101^\circ15'=151^\circ52'.5$$ [2]

这里实际上给出了一个首项为柯（$\pi/4$）、公比为 3/2 的等比级数，欘、柯、磬折的角度分别为柯的 3/2，$(3/2)^2$，$(3/2)^3$ 倍。这是在文献记载中再次出现的、具有实用背景的等比级数，与前文公比为 2/3 的级数适成对照。

“柯”不单是角度名，《考工记》中也用作长度名，它的本意是斧柄，表示一柄之长，这里不细谈了。

《考工记》有“匠人建国”、“匠人营国”等章节，介绍王城、

---

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．30

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．30

世室、明堂、宗庙等的测量、布局、营建与设置，在第二节中将予以说明。

《考工记》在其他的章节中，也都以类似的数学方法处理了相关的技术问题，在中算史上，开数学应用于技术之先河，起到积极的作用。

第二节 春秋战国时期的测量与制图

古代数学与古代的测绘技术有着不可分割的联系，在数学中包含有大量的测绘内容，测绘中又渗透着许多数学方法。早期的测量与制图技术直接反映着当时的数学发展水平。春秋战国时期是我国测绘技术发展比较迅速的时期，研究这一时期测量与制图的发展情况，有助于全面认识当时数学的发展水平。

1. 农业测量与工程测量的发展

春秋战国时期，由于农业生产的需要，农业测量技术有了较大的发展。据《左传·襄公二十五年》记载，公元前548年，楚国为了增加财政收入，曾制定了一套土地规划和整理制度。其主要内容有“书土田，度山林，鸠薮泽，辨京陵，表淳卤，数疆潦，规偃猪，町原防，牧隰皋，井衍沃”等，其中包括了许多农业测量方面的内容。“度山林”根据杜预注是指“度量山林之材以供国用。”“辨京陵”是指辨别丘陵位置以作为葬墓之地。“表淳卤”是指标出瘠薄的土地以减轻赋税。“数疆潦”是指计算疆界内有涝灾害地区的面积，相应减少其税收量。“规偃猪”是对陂堰进行规划和测量，确定容量。“町原防”是指在平广的高地上丈量和划分田块。“井衍沃”是指把肥美的土地划分为整齐的井田块。从这一记载可知，当时已经对不同类型的田地、山林、水泽等作了比较精确的测量和计算，并且作为确定赋税的依据。在农业测量中，要应用到不少数学知识，如对土地进行丈量和规划显然要知道一些

基本的面积计算方法。尽管在当时的书籍上没有找到面积计算方法的具体记载，但估计当时对于正方形、长方形、三角形、梯形和圆这些常见形状的地块面积已有了计算法则。

春秋战国时期，由于商业和手工业的发展，使城市规模日益扩大，更大规模的宫室和高台建筑兴起。当时的筑城工程是有周密计划的。《左传》记载了公元前 598 年的一项工程情况："使封人虑事，以授司徒。量功命日，分则用，平板干，称畚筑，程土物，议远迩，略基址，具糇粮，度有司。"① 《左传》还记载了公元前 510 年，晋国率领各诸侯国为周王筑城一事。动工前，"士弥牟营成周：计丈数，揣高卑，度厚薄，仞沟洫，物土方，议远迩，量事期，计徒庸，虑材用，书糇粮，以令役于诸侯，属役赋丈，书以授帅，而效诸刘子。韩简子临之，以为成命。"② 从这里我们可以看到，早在 2500 年前，在土木工程中要进行距离、高程、厚薄、深浅以及土方等一系列测量工作，同时还要进行工期、劳动力分配和所需粮食、材料等方面的计算工作。很显然，在这类工程中会遇到大量的几何问题，必须运用几何知识才能解决。如土方的测量、计算，实际上就是体积的测量和计算。最简单的立体是立方体，稍微复杂一点的有正四棱台等，当时肯定已有了常见土方的计算法则。

筑城墙、开沟渠等土木工程的测量工作在当时是有一定规范和要求的。《墨子》中有关于城墙、城门、垛口、城楼等一系列尺寸规格的记载。《考工记·匠人》有关于当时沟洫制度的记述："匠人为沟洫，耜广五寸，二耜为耦，一耦之伐，广尺、深尺谓之甽，田首倍之，广二尺、深二尺谓之遂。九夫为井，井间广四尺、深四尺谓之沟。方十里为成，成间广八尺、深八尺谓之洫。方百

① 《左传》宣公十一年。
② 《左传》昭公三十二年。

里为同，同间广二寻、深二仞谓之浍，专达于川。”《考工记》中还有关于都城形制的记载：“匠人营国，方九里，旁三门，国中九经九纬，左祖右社，面朝后市。”建造这样规划整齐的城市显然要有较高水平的测量技术。春秋战国时期我国已经有了专门掌管测量的机构和技术人员。管理测量的人员被称为“量人”。量人“掌建国之法，以分国为九州。营国城郭，营后宫，量市朝道巷门渠，造都邑亦如之。营军之垒舍，量其市朝州涂，军社之所里，国之地，与天下之涂数，皆书而藏之。”[①] 专门的测量人员以及测量管理机构的出现，说明当时的测量技术水平已发展到较高的程度。

春秋战国时期是我国大型水利工程的兴建时期。大型灌溉工程有：公元前六世纪末楚国修建的芍陂，战国时魏国修建的漳水十二渠，秦国修建的都江堰和郑国渠等。大型运河工程有春秋时吴国开凿沟通长江、淮河的邗沟和战国时魏国兴修的鸿沟。这些大型水利工程，不经过大量的勘察、测量和计算是无法进行的。例如运河的开凿，不但要进行闸坝等工程设计，还需要掌握沿途的地形、土质、水源、流量等情况，这就要进行大量的勘察和测量工作。此外，在水利工程的施工中也始终离不开测量和计算工作。大型水利工程的成功，本身就包含着测量、设计和计算等方面的成就。

2. 地图测绘的发展

春秋战国时期，由于政治、军事和经济等方面的需要，地图测绘得到了较快的发展。出现了各类不同用途的地图，如土地地图、矿产图、军事地图和建筑规划图等。这在战国时期的儒家经典著作《周礼》中，均有反映。

《周礼》有关地图的记载，反映了周到战国时期的地图测绘情况。《周礼》中列举职掌各种地图的部门近20个，所言地图按类

---

① 《周礼·夏官》。

别可大致分为以下几个方面。

《周礼·天官·冢宰》载："小宰……以官府之八成经邦治，……三日听闾里以版图。"又载："司书掌邦之六典……邦中之版土地之图。"司会"掌国之官府效县都之百物财用，凡在书契版图者式"。这是一些土地地图和户籍地图，当时利用地图定赋、提供财物。

《周礼·地官·司徒》载有："大司徒之职，掌建邦之土地之图，与人民之数，以佐王安扰邦国。以天下土地之图，周知九州地域广轮之数，辨其山林、川泽、丘陵、坟衍、原隰之名物，而辨其邦国都鄙之数，制其畿疆而沟封之，设其社稷之壝而树之田主，各以其野之所宜木，遂以名其社与野。"这是由大司徒掌管的国土地图。东汉经学大师郑玄注释："土地之图，若今司空郡国舆地图。"这种地图不仅有地域的范围，而且还有了表示山丘、岗阜、水崖、低平等地形地物诸要素。《周礼·地官·司徒》还载："凡民讼以地比正之，地讼以图正之。""遂人掌邦之野，以土地之图经田野，造鄙形体之法。"这里讲的是用来划分疆域田界的土地所有权地图，以及土地面积图。当时地图已成为管理土地、封邦建国的重要工具。

《周礼·春官·宗伯》载："冢人掌公墓之地，辨其兆域而为之图。""墓大夫掌凡邦墓之地域为之图，令国民族葬而掌其令。"这里记载的是公墓地图和墓穴范围图。此外，还有一类地图是司马掌管的地图。《周礼·夏官·司马》载："司险掌九州之图，以周知其山林川泽之阻而达其道路。""职方氏掌天下之图，以掌天下之地，辨其邦国、都鄙、四夷、八蛮、七闽、九貉、五戎、六狄之人民，与其财用九谷六畜之数。"由此可知，当时有了由军事部门掌管的专用地图。

战国时期各国在地图方面已积累了丰富的经验。由于战争的需要，地图在军事上应用得十分普遍。战国成书的《管子·地图

篇》对地图在军事上的应用有精彩的描述："凡兵主者，必先审知地图；轘辕之险，滥车之水，名山、通谷、经川、陵陆、丘阜之所在，苴草、林木、蒲苇之所茂，道里之远近，城廓之大小，名邑、废邑，困殖之地，必尽知之。"这段话把军事地图所需反映的地形、地物、距离、城郭等要素描述的十分详细。绘制这样内容复杂、地物表示十分详尽的地图，如果不经过实际测量和一定的计算，显然是不能完成的。

战国时期的测绘技术已有了较高的水平。在河北省平山县战国时的中山国王墓中曾出土了一幅墓穴建筑规划图。这幅"兆域图"被刻镌在一块长 94 厘米、宽 48 厘米的长方形铜版上[①]。（图 2·5·1）在"兆域图"的中间部分有堂五座。中央三个大堂（即哀后堂、王堂、王后堂）大小相同，均为"方二百尺"。大堂东西两侧有两个大小相等的小堂。大堂之间相距"百尺"，小堂距大堂八十尺。图中有宫四个，大小相等，均为"方百尺"。此外还有中、内宫垣两道。"丘足"应是墓坡的坡足，大堂与它间有"丘平者五十尺，其坡五十尺"。对于从"中宫垣"到"内宫垣"以及"内宫垣"至"丘足"等建筑物的距离，图中也都一一注明了尺寸。

这幅"兆域图"不但年代早，是我国目前所发现最早的建筑平面规划图，而且反映出很高的制图技巧和数学水平。从画法上看，该图符合正投影原理。它是一幅采用正投影法制成的平面图实样，图中的建筑物都用粗体实表示，"丘足"不是地面物体，而是起坡点的一条基准线，所以用细线表示[②]。在这幅图中，各建筑物之间的相对位置均有尺寸标注。从标绘尺寸与实际绘制尺寸看，

---

① 河北省文物管理处．河北省平山县战国中山国墓葬发掘简报．文物，1979（1）：1～31

② 孙仲明．战国中山王墓"兆域图"的初步探讨．地理研究，1982（1）

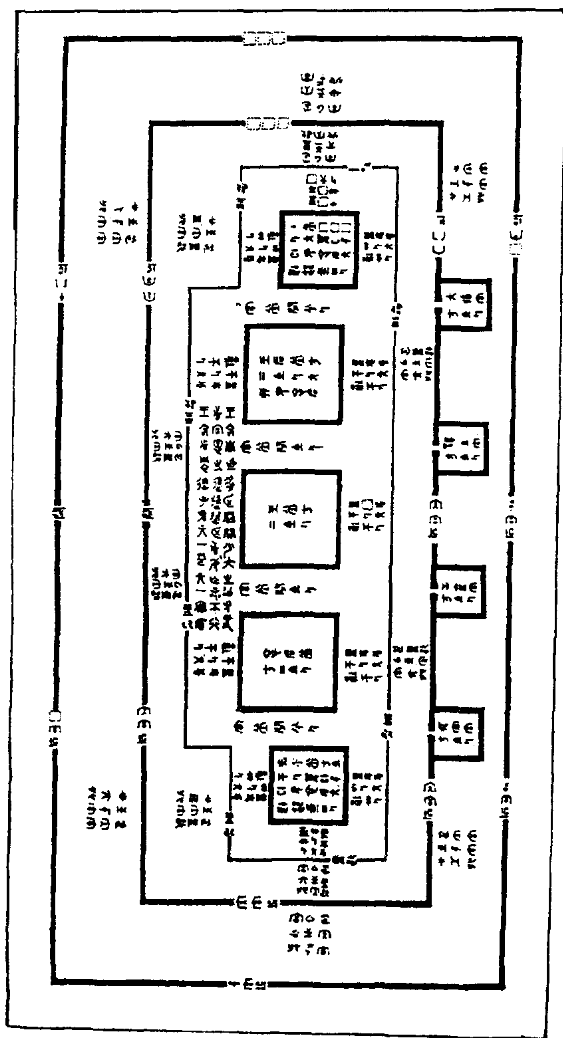


图2·5·1　兆域图铜版铭文摹本

当时在绘图方法上已应用了比例尺概念。这幅图上标明长度数据的单位有两种，“丘足”线以外用“步”为单位，以内用尺为单位，宫、堂也以尺作为单位。从原图量得图上“哀后堂”、“王堂”、“王后堂”的尺寸分别为 8.670 厘米、8.686 厘米和 8.860 厘米，平均值 8.738 厘米；两堂之间距离分别是 4.515 厘米和 4.550 厘米，平均值 4.532 厘米。堂的边长约为堂间距的 2 倍。图中标明“堂方二百尺”，“两间百尺”，即堂边为间距的 2 倍，说明“兆域图”以尺为单位的部分显然是按比例绘制的，只是制作略有误差，且铜版经火烧后略有变形，尺寸稍有改变。如按当时 1 尺为 22 厘米换算，图上王堂边长 4 寸，堂间距 2 寸，即 1 寸代表 50 尺。原图是按 1∶500 的比例尺绘制的[①]。

“兆域图”上虽然没有标出方向，但从图的内容和形式看，它显然是有方位的，中山王墓的发掘表明，墓室门朝南开，说明图的上方为南，下方为北。除有一定的方向性外，“兆域图”具有严格的对称关系，图上所有的堂、宫、丘足的基线以图形线条之间几乎都是对称的。

3. 春秋战国时期的测绘工具与测量方法

规、矩、准、绳是我国古代最常用的测绘工具。它们起源很早，传说上古时代，伏羲曾创制规矩。古代还传说规、矩、准、绳等工具是尧时的著名工匠倕发明的。据《史记》记载，在大禹时代的治水工程中使用了这四种测绘工具[②]。这些传说虽然不十分可靠，但甲骨文中已出现“规”字，说明那些测绘工具在文字出现之前就已有之。春秋战国时期，测绘技术有了很大的发展，规、矩、准、绳等测绘工具已被广泛使用，在当时的许多古籍中都可以找到有关这些工具的记载。从这些记载中，可以了解到这几种

---

① 杨鸿勋．战国中山王陵及兆域图研究．考古学报，1980（1）

② 《史记·夏本纪第二》。

基本测绘工具的功用。

《墨子》、《孟子》、《荀子》、《庄子》、《周礼》等经典著作中都多次提到测绘工具，现引其中一些记载如下：

"轮匠执其规矩，以度天下之方圆。"（《墨子·天文志》）

"圜，一中同长也。圜，规写交也。方，柱隅四讙也。矩写交也。"（《墨子》"经上"、"经说上"）

"公输子之巧，不以规矩，不能成方圆。"（《孟子·离娄》）

"圣人既竭目力焉，继之以规、矩、准、绳，以为方圆平直，不可胜也。"（《孟子·离娄》）

"设规矩，陈绳墨，便备用，君子不如工人。"（《荀子·儒效》）

"故绳墨陈矣，则不可欺以曲直；衡诚县矣，则不可欺以轻重；规矩诚设矣，则不可欺以方圆……故绳直者，直之至，衡者，平之至，规矩者，方圆之至。"（《荀子·礼论》）

"圆者中规，方者中矩。""曲者中钩，直者应绳。"（《庄子·马蹄》）

"巧匠目意中绳，然必先以规矩为度……故绳直而枉木斫，准夷而高科削，权衡而重益轻。"（《韩非子·有度》）

规是古代专门用作画圆的制图工具。甲骨文中规字写作"㕛"[1]，像手持规画圆。汉代有许多石刻画上都有"伏羲手执规，女娲手执矩"的图像（图2·5·2），从图形上看似与现在一般所用的圆规有所不同。推想其结构，大概与现在木工还在使用的一种被称为"运尺"的画圆工具相类似。如图2·5·3所示，规由定心件1和画弧件2组成。件1主要用来定心，可在件2的横杆部分上滑动，以确定不同的半径。作图时，件1顶点不动，使画弧件2在平面上转动，其端点就绘出一个圆。

① 李俨：中国古代数学史料．中国科学图书仪器公司．1954．8



图 2·5·2　伏羲女娲手执规矩图像
（汉武梁祠石刻画）

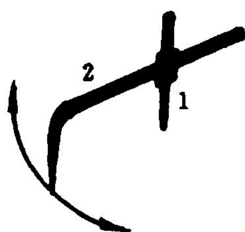


图 2·5·3　规示意图

矩是一种多功能的工具,既可以用来作图也可以用来测量。矩在甲骨文中作“［”[①]，后来的矩是拐尺形，与“女娲手执矩”图形中的矩相同。矩的边上一般加有刻度，它不但用来画直线和画直角，还可以用来测量。根据水平线与铅垂线成直角的原理，利用矩可以检验水平。此外，矩也是古代最重要的间接测量工具之一，根据相似勾股形对应边成比例原理，用矩可测量地物的高低和远近。将在第四编第一章中讨论。

绳是古代用来进行直线测量的工具。“绳墨”就是用墨线以取直。古代测量长度的测绳一般也称为绳。

准是水准测量工具，也就是水平仪。只在重力作用下的静止水的表面可看作水平面，可以作为测量水平的标准。古代对于这一点早就有所认识。《庄子·刻意》说：“水之性，不杂则清，莫动则平。”《庄子·天道》载：“水静则明，烛须眉，平中准，大匠取法焉。”《考工记》中有“匠人建国，水地以悬”的记载，汉代郑玄作注说：“于四角立植而悬，以水望其高下，高下既定，乃为位而平地。”根据郑玄的注释，这就是以水平仪一类的工具进行水准高程测量。其方法是，在所建都城四角立柱，然后悬绳正柱，再以水平仪测量四角的相对高程。这里所用的方法与现在的水准测

① 李俨. 中国古代数学史料. 中国科学图书仪器公司. 1954. 8

量方法已比较接近。

除了上面介绍的几种工具外，古代还有一种十分重要的测量工具，这就是表。表是早古老的测量工具之一，它是直立在平地上的一根杆子，形式十分简单。表具有多种测量功用，可用来定方向，也可用来进行间接测量和直线定线等。但在早期表主要还是用于测定方向。春秋战国时期的方向测定技术已有了较高的水平，《考工记》中记载的立表定方向的方法反映了较高的测量技术水平。下面我们做具体的介绍。

《考工记》载："匠人建国，水地以悬。置染以悬，眂以景，为规，识日出之景与日入之景。昼参诸日中之景，夜考之极星，以正朝夕。"

"水地以悬"一句，我们前面已论及，是指匠人在建都时，先用水平之法来测定地面是否水平。"置染以悬"就是以悬挂重物之绳为基准，使"染"（也就是表）和整平后的地面相垂直。"眂以景"是指观察表影。"为规，识日出与日入之景"就是以表为圆心作圆，然后把日出和日没时表影与圆周相交的两点记下来。这两点连接起来就确定了东西方向（图2·5·4）。在此基础上，白天参考日中时表影的方向，夜晚再参考北极星的方向，得到较为准确的南北方向便可进一步校正东西方向。

《考工记》中所记述的方法已包含了不少较为科学的方面。首先，确定方向要在进行水准测量后平整地面的基础上进行；其次，要检验表与地面的垂直度，使其与地面保持垂直；此外，测量之后还要与另外两种观测结果相参考。

《考工记》中的立表定向法也要用到一定的数学知识。例如，用日中表影的方向来检验已定出的东西方向，也就是检验日中表影确定的南北方向与观测日出、日落表影方向所确定的东西方向是否垂直。在检验中，只要看日中表影是否落在日出、日没时表影与圆周相交两点联线的中点上就可做出判断。这要用到这样一

条定理：过圆上一条弦的中点与圆心连线，则此直线与弦相垂直。实际上，《考工记》中的方法本身已较巧妙地利用了圆的一些性质和对称原理。

以上我们介绍了春秋战国时期的测量与制图的发展情况，从这些论述中可以看到，当时在测绘中应用了不少数学知识。

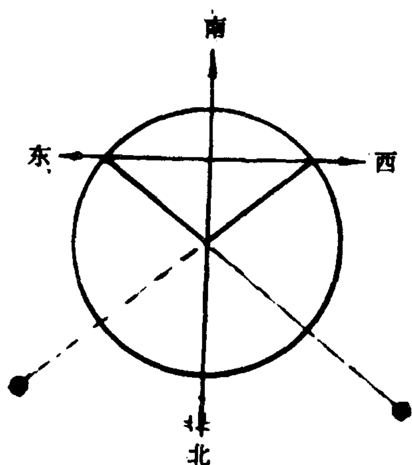


图 2·5·4　《考工记》中“正朝夕”示意图

第 三 编

秦汉简牍中的数学与筹算

秦和西汉是中国传统数学的奠基时期，是政治、经济和文化发展的必然结果。本编主要讲述《九章算术》以外的数学发展情况。

第一章　秦、西汉的时代背景

本章讲述秦到西汉末的数学发展的社会背景，实际上是本编和下一编的总论。中国数学的发展，在秦、（西）汉时期是一个极为重要的时期，正是在这个时期出现了专著并形成了体系，因此有必要较详细地讲述当时的背景问题。

第一节　统一帝国的政治、经济和文化

1. 统一帝国的政治

春秋战国时期，诸侯国林立，各自为政的政治局面，到公元前 221 年由西方逐渐强大起来的秦国所统一，在中国历史上第一次建立起一个统一的中央集权的封建专制国家。秦王嬴政自称始皇帝。

秦王朝统一中国后，在政治方面采取许多措施，制订了一套

制度。首先，在全国设三十六郡，郡置守、尉、监。更民名曰“黔首”[1]。秦始皇规定：秦为水德，每年十月朔为岁首、尚黑，数以六为纪，故以六尺为步。统一度量衡、货币、车轨和文字。这对于国内各地区之间的交往，商品交换，文化交流等都有重要意义。这套制度，奠定了中国2000年封建国家的制度基础。

秦帝国凭借强大的军事力量，实行拓边。在北边，秦始皇于公元前218年派大军征伐河套地区的匈奴，收复了河套南北的广大地区，并设置了九原郡。在东南沿海，秦征服了百越（今浙江、福建、江西、湖南一带），第一次与中原连成一体。在南方，秦大军征服了整个岭南。增设了南海、桂林、象三郡。并开设了灵渠，沟通了长江和珠江两大水系。

公元前220年，秦始皇下令修建了以首都咸阳为中心的驰道。一条向东通燕齐，一条向南直达吴楚。后又修直道，由咸阳向北经云阳、上郡直达九原，全长700余公里。后又修越五岭的五天道。这样一个以咸阳为中心的四通八达的交通网，南到交趾，西到陇西，西南到蜀，北到九原，东到朝鲜半岛，从而把全国各地及周边地区联系在一起了。这庞大的交通网作用巨大，它打通了许多地区的封闭状态，特别是秦新开辟的东南山区和西南地区以前交通极为不便。虽然统治者修路的目的是为了加强对人民的控制，但是，它也大大方便了各地区间人员来往，商品贩运，加速了先进的汉文化向这些边远地区的传播。远在2000多年前，在当时的交通工具限制下，一个帝国能有效地控制如此庞大的疆土，不能不与发达的交通有关。另外，和交通网相配合，当时设置驿站，这对快速传递信息，勾通社会各个机体间的联系有不可估量的作用，同时它也有利于科学思想和技术的传播。秦代修建的庞大交通网在后代很长时间里一直起作用，直道的遗迹在今天有的段落

---

① 《史记·秦始皇本纪》。

仍清晰可见。

秦始皇做了大量顺应历史潮流的有伟大意义的工作，应当给予高度评价。但是他好大喜功，大兴土木，对百姓实行空前严酷的苛政，一人犯法，诛灭九族，肉刑之残酷，名目之多是空前的。光在骊山服苦役的刑徒就有十余万，全国犯人之多可以想见了。特别是在文化领域实行极严酷的思想专制，焚书坑儒，因言获罪不胜其数。正是由于这种残暴的统治，激起了全国人民的反抗，只有十几年时间，秦王朝就被起义的农民所推翻。

公元前206年，刘邦（前256～前195）建立了政权，建都长安（今西安市），史称西汉。"汉承秦制"，继续实行统一政策。但又鉴于秦王朝高度集中的危害，汉王朝采取了一些让步措施，汉初还分封诸侯王，形成郡国交错的局面。在某种意义上说，这是给地方有某种灵活措施的权力，有利于经济发展。

汉初，北方匈奴势力逐渐强盛，重新占领了河套地区，控制了中国北部、东北部和西北部的广大地区。经常派骑兵南下骚扰汉边境地区，有时匈奴先锋竟达首都长安附近。汉帝国经过几十年的准备，在汉武帝时开始反击匈奴。经过几次大的交锋，匈奴向北退去，从而保护了北部边境的安宁。

2. 统一帝国的经济

早在战国时期，秦就采用商鞅变法，下令废井田，允许土地买卖，承认土地私有权。这在很大程度上调动了农民的积极性，有利于生产发展。秦统一全国后，继续进行这些改革，"男乐其畴，女修其业，事各有序。惠被诸产，久并来田，莫不安所"[①]。秦始皇大兴土木，如果没有强大的经济实力作后盾是不可想象的。

汉王朝建立后，采取了一系列措施，稳定社会秩序，重视农业生产。首先组织军队复员，增加社会劳动力，招抚流亡于山泽

① 《史记·秦始皇本纪》。

的无户籍人口回乡，下令释放奴婢，轻徭薄赋，打击地方割据势力，实行削藩。公元前156年6月，景帝“令田半租”①，即三十税一，并成为汉朝的定制。文景时又减少地方的徭役，卫卒，停止郡国岁贡，开放山泽之禁。颁布了振贷鳏寡孤独的法令。这些措施使农民减轻了负担，生产比较安定，有利于提高生产力。农业发展了，粮价大降，“谷至石数十钱，上下饶羡”。

除了政治上稳定外，铁农具的普遍使用也大大提高了功效。牛耕已大量使用，这是农业动力的一大变革。另外，谷物加工工具的改进，播种机械的使用都大大提高了生产效率。水利工程的修建促进了农业的发展。

农业的发展的一个标志是耕地面积不断扩大，到西汉末年垦田面积已达八百二十七万五百余顷，人口达五千九百余万②。

秦汉时期，精耕细作的生产传统已经形成，古代农业科学知识开始系统化和理论化。

农业的发展还体现在谷物种类及生产区域的扩大。汉民族的主要发祥地——黄河流域多由黄土覆盖，适应耐旱的谷子等作物生长，汉以前中原虽种“五谷”，但主要以谷子、糜子为主。秦汉之际，各类作物之间的比重发生了变化，麦、稻种植面积增加了。它们的单产高于谷、糜。

以前谷物生产区主要集中在关中平原至黄河中下游的华北平原一带，秦汉时期，谷物种植业向南、西南、北扩展，巴蜀地区的农业从战国时起就不断发展。北部边郡在这一时期已成为重要的农业区。

谷物种植业的发展为人民提供了基本的糊口粮食，但仅限于此，还无法满足人民正常生活的需要。秦汉时期，园圃业已成为

---

① 《汉书·景帝纪》。

② 朱绍侯主编．中国古代史（上）．298

农业的一个重要生产部门。它是以蔬菜、果物以及其他一些经济作物为主要栽培对象。当时在城郊已出现大量以经营园圃为业的菜农、果农。果木经营常以“千树”计，蔬菜及其他园圃以“千亩”、“千畦”计。其经营规模之大可以想见。

另外，畜牧业在秦汉也有很大发展，特别是养马、养牛业大发展，武帝时出现了“众庶街巷有马，阡陌之间成群”[1] 的景象。畜牧业大发展，不但为军事、农业提供了动力，而且也为人民提供了大量肉类食物。

农业和手工业的发展，促进了商业的繁荣。国家的统一，经济的恢复和发展，开放山泽，为商业的繁荣创造了条件。汉初，采取抑商政策，不许商人衣丝乘车。为官吏，重收商业税，这样的结果严重阻塞了社会商品的流通，实行地区封锁，严重阻碍了社会的发展。文帝时，内地粮价大跌，严重伤农，而边疆粮缺价贵的现象就是抑商政策的恶果。晁错建议让民输粟入边，入粟拜爵就是一种补救措施。

全国交通网的建成，造船、造车技术的提高以及大量畜力的使用为商业发展提供了必需的交通工具。

西汉时商业经营的范围很广，市场上常陈列着牲畜、毛皮、谷物、果菜、酱醋、水产、帛絮、染料、木材、木器、铜铁器等类。全国已形成若干经济区域，每个区域都有大的都会。各地区、各都会之间都有大道相联。在这些大道上，驿传罗布，车马杂沓，货物转输，络绎相属。

当时不但国内商业贸易发达，而且对外贸易也十分兴隆。张骞通西域后，开辟了丝绸之路。通过这条路，中国精美华丽的丝织品、漆器等源源不断地输入到中、西亚和欧洲，运进各种毛织物、香料、宝石等奢侈品。

---

① 《汉书·食货志》。

由于商业发展，出现了许多富商大贾。蜀卓氏在临邛，“即铁山鼓铸，运筹策，倾滇蜀之民，富至僮千人”。南阳孔氏“大鼓铸，规陂池”，致富数千金。洛阳师史专事贩运，“转毂以百数，贾郡国无所不至”。东汉时，富室的“船车贾贩，周于四方，废居积贮，满于都城”。这个时期，“天下百郡千县，市邑万数”。

由于商业的繁荣，出现了许多大城市。京师长安 8 万余户，人口 24 万多，是全国最繁华最富庶的城市。城周围长 22 600 多米，有九市，十六桥，十二门，街道纵横交错，建筑富丽堂皇。长安商业区很繁华，全城有九个市场，密集着各种大小商店，出卖各地的货物。同类商店又集中在一起，成为许多“市”，如酒市、牛市、马市、羊市等。

除长安之外，洛阳、临淄、邯郸、宛、成都（当时合称五都）等都是当时著名大城市。洛阳陆路交通方便。临淄纺织业发达。宛冶铁发达。成都的蜀锦驰名全国。

不但中原城市繁荣，就是其他地区也出现了一些重要的城市，如江陵、吴（苏州）、番禺（广州）等都是南方的货物集散地。

由于商业和城市的发展与繁荣，对科学产生了很大促进作用。首先，它打破了封闭状态，加强了国内外不同地区、不同民族之间的文化、思想和科技的交流，活跃了人们的思想，这是科学发展的重要条件。其次，商业贸易涉及到大量比例换算，数量计算，这就促进了数学的发展。《九章算术》的“粟米”章就是专讲各种物的交换过程的运算。中国古代比例理论成熟很早，这与商业、酿酒业和中药配方要涉及大量比例运算有关。再其次，城市的兴起与发展对科技发展有特殊意义。城市把知识分子相对集中起来，这对知识的积累与传授十分有利。

3. 统一帝国的文化

春秋战国时代的百家争鸣、百花齐放，给中国文化带来了空前的繁荣。秦统一后，实行了严酷的思想文化专制。始皇三十四

年（公元前 213 年），秦始皇接受李斯的建议，下令“史官非《秦纪》皆烧之；非博士官所职，天下敢有藏《诗》、《书》、百家语者，悉诣守、尉杂烧之；有敢偶语《诗》、《书》者弃市；以古非今者族；吏见如不举者同罪；令下三十日不烧，黥为城旦。”严禁私学，以吏为师[①]这种愚蠢而残暴的行动，造成了中国文化典籍的惨重损失。汉兴以后，总结了秦代的教训，崇尚黄老之言，主张“无为而治”，也就是在肯定新的封建王朝统治秩序的前提下，主张统治者用少所作为的办法，缓和阶级矛盾，“顺民之情与之休息”，要统治者对人民少干扰，使其安居乐业。

汉统治者采取了许多措施，与民休息。吕后元年（公元前 187 年）“除三族罪，妖言令”[②]，也就是废除了严酷的株连三族，因言获罪的法令，这在法律上保证了人民有一定程度上的言论自由，为冲破秦统一以来的思想禁锢政策提供了条件。

汉初年虽仍因袭秦挟书律，但不久（前 191 年）就废除了。随之而来的是思想方面的活跃，它承接春秋战国时代百家争鸣的余波，以陆贾为代表的黄老思想大兴，爱好者众多，像曹参（？～前 190），盖公、窦太后、陈平（？～前 178）等人都好谈黄老。据《史记》卷 54 记载：“（曹参）闻胶西有盖公，善治黄老言，使人厚布请之。既见盖公，盖公为言治道贵清静而民自定，推此类具言之。参于是避正堂，舍盖公焉。其治要用黄老术，故相齐九年，齐国安集，大称贤相”。其实，黄老思想并不全是道家思想，而是取道家“清净无为”的思想，再加上儒家“仁政”思想的一个混合物，当时，“各种不同学派的思想也都乐于称说黄老之言”[③]。这说明各种思想又活跃起来了。

---

① 《史记·秦始皇本纪》。

② 《汉书·高后记》。

③ 翦伯赞．中国史纲要．第一册，196

汉武帝（前156～前87）采用董仲舒的建议，实行“罢黜百家，独尊儒术”，把不治儒家五经的太常博士一律罢黜，排斥黄老刑名百家之言于官学之外，并且优礼延揽儒生数百人。这固然是加强思想统治，但“罢黜百家”仅仅是把百家思想排斥在官学之外，并未用暴力加以摧毁。

秦统一后，取缔了私学，实行“以吏为师”也就是让官吏直接出马对百姓进行封建灌输，钳制人们的思想自由。

汉代建立后，为适应统一帝国的需要，大兴教育。汉武帝时开始设立太学，主要任务是传授知识，研究学问。它的设立标志着我国封建官学制度的确立。

汉代官学分中央和地方两类。中央官学有大学性质的太学，有特殊性质的鸿都门学，四姓小侯学等。地方官学按行政区划分。太学的“教授”称博士。博士必须是精通经学的学者。武帝时设五经博士，教授儒家经典。实行分科施教，通常博士一人只专一经或一经中的一案。博士有优厚的待遇，供住宿，并为他们制定统一的服装。

西汉时的太学学生来源有二：一是由太常直接选送；二是由郡国、县、道、邑选送。正式学生都有官俸，也有自费来太学求学的。

汉代大规模兴办官学对学术有很大影响，其意义深远。首先，它促进了文化的发展。一个民族，只有文化发达，科学技术才能随之而发展。正式教育的建立，培养了大批有文化的人，为文化的发展提供了人员。其次，太学里招有大批学者，政府供给他们生活费用，使他们有时间和精力潜心研究学术。再其次，太学的存在把大批学者聚在一起，师生间互相讨论，这就创造了浓厚的学术空气，虽然当时太学里主要讲儒学，但偶尔也涉及自然科学。当时太学里实行大班讲课和高年级学生辅导低年级学生相结合的形式。大班上课，一般都由学者名流宣讲，富有学术性。研究学

问，提倡问难论辩，自修为主，鼓励自由研究。在浓厚的学术风气熏陶下，许多人也接触到自然科学内容。

总之，汉代大兴教育，培养了大量知识分子，活跃了学术空气，为科学和文化的发展提供了有利的条件。

4. 对外交流

汉朝建立以后，匈奴不断南下骚扰。汉武帝大规模反击匈奴，打通了河西走廊，保护了汉与西域的交通。元帝时汉政府以王昭君嫁给了呼韩邪单于，结束了百余年汉、匈之间的武装冲突，恢复了旧日的和好关系。此后约有半个世纪，在北部边境出现了“边城晏闭，牛马布野，三世无犬吠之警，黎庶亡干戈之役”[1] 的和平景象。汉、匈人民在阴山以南地区杂居，互通关市。匈奴的马匹、牲畜大量运往内地，先进的养马技术也传入中原；汉族人民穿井、筑城等先进经验也传入了匈奴地区。这种交往促进了经济文化的发展。

汉大规模对外交流是通西域丝绸之路的开辟。西汉建元三年（前 138 年）张骞（？——前 114）出使西域，获得了大量前所未闻的西域资料。元狩四年（前 119）张骞再次出使西域，目的是约乌孙夹击匈奴。这次西行，张骞的副使远达大夏（阿富汗），安息（伊朗）等国。汉的其他使者还达到奄蔡（黑海以北）、条支（伊拉克），犁轩（罗马帝国）等。中亚、西亚等国也派遣使者东来通商。

元封六年（前 105），西汉以宗室女细君与乌孙王和亲，巩固了汉与乌孙的关系。以后汉又对西域发动了几次远征，赶走了匈奴势力，完全打通了中西陆路通路。从长安出发，经敦煌、鄯善、于阗、莎车等地，越葱岭到大月氏、安息等国。另一路经敦煌、车师前王庭、龟兹、疏勒等地，越葱岭到大宛、康居、奄蔡，然后

---

① 《汉书·匈奴传》。

南下，可达安息，由安息向西到大秦（罗马帝国）。这就是举世闻名的丝绸之路。

汉通西域，开辟丝绸之路意义重大。西域通道把天山南北地区第一次与内地联为一体，加强了中原同西域地区的经济、文化联系。西域的果木、蔬菜移向中原；西域的良马、各种珍禽异兽源源东来。丝绸之路，第一次使中国与中亚、西亚以至欧洲有了直接交往，打破了中国大陆的封闭状态。在一定程度上活跃了中国人的思想，有利于科技的发展。不同民族间的文化交流更有特殊意义。

当时中国和西方不但在陆路上有丝绸之路相通，而且在海上也开辟了航道。武帝时曾派人从广东出发，远涉印度洋，至今斯里兰卡。

第二节　科学技术

1. 农业技术的提高

秦汉时代，中国的科学技术得到迅速发展，在各个领域都取得了许多重要成果。这是中国传统农业理论的形成时期。

铁器及铁农具的使用对中国农业有巨大影响。我国虽在春秋战国时期就在一定范围内使用了铁器，但大规模地使用是在西汉。当时不但在中原而且在边疆地区也广泛使用。

铁铧的出现是农具的一个重要改进。只有发明了锋锐、耐磨的破土器——犁铧，才有可能进行起垄耕作，同时也为利用畜力耕地创造了条件。我们推测，犁的出现应在畜耕之前。实行井田制时，其主要耕作形式很可能是漫播，也就是将作物种子均匀撒在整块耕地上。由于中原当时主要农作物——谷子的特性，很可能漫播形式延续了很长时间。这种播种方式有很多缺点，不利于除草、施肥、灌溉和保墒。《吕氏春秋·辨土》篇中提到垄的起法，

可见战国末已有垄播法。从汉画像石上看，谷子都是整齐一排排的，西汉时已普遍使用垄播法是毫无疑问的。犁的出现可能是为了适应起垄的需要，反过来，锋利、耐磨的犁铧又促进了垄播技术的完善。起垄作亩的方式对锄草、施肥、碎土、松土以及在春天缺水的黄土高原保墒有特殊意义。

铁犁铧的应用推动了牛耕技术的成熟。从众多的汉壁画、画像砖上看，牛耕图很多，说明西汉时期牛耕已相当普遍了。这是人类利用动力的一次巨大变革，把一种价低、分布广，可任意移动的，功率大的畜力用于农业生产，把人力解放出来，用于精耕细作。

随着农业生产的发展，人民生活的安定，农业耕作技术也提高了。汉武帝时，全国推广代田法。所谓代田法即在地里开沟作垄，种子播在沟里，等苗长高后，进行中耕除草，并将垄上的土推到沟里，以培苗根部。第二年垄沟互易，如此轮回。这个方法能使幼苗得到较多的水分，有利于生长，同时使作物的根扎得深，不怕干旱和风吹。土地轮番使用，地力可得到恢复。这是适应中原和北部春天干旱又多风的情况，采用代田法可使粮食亩产提高三分之一到三分之二。

西汉赵过推广过耧车，也就是开沟、下种、覆土三道工序一次完成，一次播种三行的工具。这大大提高了播种效率和质量，节省劳力一半以上。汉代农具种类繁多，渐趋完善，从整地、播种、锄草、灌溉、收获到农产品加工等各种新型农具都有不少。并发明了溲耕法，它在种子外面包上一层羊粪，这样幼苗能及时取得养料，有利生长。

2. 土木建筑工程

由于中原的地理条件，中国的建筑物多为以木为主的木石结构，中原到处可见的黄土，粘性很大，砸实干后呈板结状，异常坚固，所以古城多用板筑法取黄土筑成。秦汉时，城市大兴。“一

般说，郡、县两级的治所，均须筑城立市，所以郡县的总数也就大致相当于当时的城市的数量”①。平帝时，“凡郡、国百三、县、邑、道，侯国千五百八十七”②，实际上，一县内不止一处城邑。

城邑的规模也很大。中原发达地区常有数十万人的大城市，当时城内建筑多为平房，要容纳这么多人，一城的面积可以想见了。如此规模大、数量多的城市的建成，没有相当的测量、建筑技术是不可想象的。

秦汉时代的宫殿建筑非常宏伟。秦始皇修筑的阿房宫可为当时宫殿建筑的代表。阿房宫始建于惠文王时，秦始皇“广其宫，规恢三百余里。离宫别馆，弥山跨谷，辇道相属，阁道通骊山八十余里。表南山之巅以为阙，络樊川以为池。作阿房前殿，东西五十步，南北五十丈，上可坐万人，下建五丈旗。以木兰为梁，以磁石为门。周驰为复道，度渭属之咸阳，以象太极阁道抵营室也。”③

西汉时也大兴土木，在长安城中修建未央宫。“未央宫周迴二十八里，前殿东西五十丈，深十五丈，高三十五丈。营未央宫，因龙首山以制前殿”④。另外，长安城中修宫、殿、观总数在百以上。

中国独有的斗拱结构在战国时已出现了，在汉代有很大发展。形式也变化多样，出现了多层拱。多层建筑也出现了，而且以木构造框架。说明了当时对结构力学有了一定认识。

汉代在水利工程方面也有巨大成就。黄河是中华民族的摇篮，但它也常带来灾难。因此，治理黄河是当时中国社会的重大问题。公元前 132 年黄河决口，泛滥成灾，遍及十六郡。公元前 109 年

① 林剑鸣主编．秦汉社会文明．西安：西北大学出版社，1985．138

② 《汉书·地理志》

③ 陈直．三辅黄图校证．西安：陕西人民出版社．1980．14～15

④ 《西京杂记》

汉武帝发几万民工去堵塞决口。他还率大臣们巡视工地，检查工程，令大臣亲自背土抢修，终于堵住了决口。

由于中原雨量少且又集中于夏季，夏季易受涝灾，其他季节又易受旱灾，所以修水利工程对农业来说十分重要。秦汉时代修建水利工程规模之大，范围之广在我国历史上是罕见的。秦始皇派人在今广西兴安县修灵渠。由于地势险峻，为使水势平缓，便于行船，灵渠选取了迂回的路线，相对增加了渠道长度，从而降低了河床的比降。灵渠的设计是很科学的。

公元前 129 年汉武帝下令发民工引渭水开渠直通黄河，这就是与渭河平行的漕渠。渠全长 100 多公里，修成后节约了近一半漕运粮食时间，又灌溉了民田万余顷。

汉武帝先后又发卒万人修龙首渠。渠道须经过商颜山。这里土质疏松，渠岸易于崩毁，于是不得不开隧洞，穿过 7 里宽的商颜山。后又修白渠、六辅渠、成国渠、灵轵渠等众多水利工程。

大规模兴修水利工程，灌溉田地，使关中沃野千里，当时的民谣赞美说："田于何所？池阳谷口。郑国在前，白渠起后。举臿为云，决渠为雨。泾水一石，其泥数斗，且溉且粪，长我禾黍。衣食京师，亿万之口"[1]。水渠的修建，使关中的农业在汉经济中有举足轻重的作用。

另一方面，修建水利工程需要复杂的测量设计、计算，这有力地推动了科学技术特别是数学、水利学的发展。出现了像徐伯这样的测量学家。漕渠所经过的线路地形非常复杂，这需要很高的勘测和设计能力。特别是修龙首渠上的隧洞，先在山上开许多竖井，然后在每个竖井下向两个方向同时掘进，各段隧洞相对接，这就需要很精确地测量技术，不然各段隧洞在上下左右两个方位上稍有偏差，就无法对接了，即使是勉强对接上了，也无法正常

[1] 《汉书·沟洫志》

通水。

3. 冶金技术的发展

秦汉时代的冶金技术有了很大发展，冶铁业已上升到主要地位，冶铜业所占的比例明显下降了。在严格意义上说，中国在西汉才进入铁器时代。

冶金业包括采矿、冶炼、铸造等过程。在汉代冶铁业规模大、分布广，工艺流程齐全，技术先进。

就分布范围来说，汉设置了49处铁官，分布在今陕西、河南、山西、山东、江苏、湖南、四川、河北、辽宁、甘肃等省，民间的冶铁业在边远地区也有分布。当时重要的经济区几乎都有冶铁作坊。

就冶金规模来说，汉元帝时，“诸铁官皆置吏卒徒，攻山取铜铁，一岁功十万人以上”[1]。一个冶铁作坊的面积常达数万平方米，有炼炉10余座。一般炉体巨大。郑州古荥镇汉代冶铁遗址，发现有椭圆形炼炉2座。炉底面积8.4平方米，容积估计为40～50立方米。炉前有带结瘤的炉底积铁，重约20吨以上的有3块。

从西汉中晚期的河南巩县铁生沟冶铁遗址看，当时从开矿、冶炼到制成品都有机地结合在一起。炼炉设在铁矿石产地附近，矿石开采下后，经过选矿，直接送入炼铁炉。现已发现各种炼炉18座，熔炉1座，另有配料池、铸造坑、淬火坑、藏铁坑等，这说明当时从采矿、选矿、配料、入炉、熔炼出铁等工序严密地形成了一体。

当时炉壁由耐火材料砌成，并使用碱性熔剂。冶炼技术的提高，产品品种众多。据分析，当时有各种高碳钢、中碳钢、低碳钢、灰口铁、白心韧性铸铁以及球墨铸铁，并发明了炒钢技术。

汉代进一步发展了叠铸技术、铸范制造精密，铸件质量高。

---

[1] 《汉书》卷72“贡禹传”。

4. 机械与纺织技术

冶金业的发展为机械的发展提供了基础。从陆路交通工具看，当时已能制造各种车辆，一般都是两轮，但也有载重量大的四轮车，并且发明了独轮车。铁轴承也出现了。各地出土的秦汉时代的齿轮，虽在设计上还很原始，但它显示出当时加工技术已相当高。

农业机械在秦、汉是一个大发展时期。耧车就是一部很复杂的机器。西汉晚期出现了风车，另外，从整地、播种、灌溉、收获等都有相应的工具。

更重要的成就是体现在造船技术上。秦、汉是我国造船业的一个高峰时期。当时造船规模很大，单只船载重量大，并出现数层高的巨大楼船，这标志着造船技术的成熟。船不但用来运货物，而且用来进行水上作战和其他政治活动。公元前 210 年秦始皇开始第五次巡行。一支庞大的船队浮江过海，最后他们在江苏南部乘海船北上，在山东登陆。在海中活动如此长时间，船的航海设备的性能一定相当好。汉代进行海战，船队十分庞大，一次战役能出动楼船 2000 余艘，水军达 20 万人之多。没有一定的造船技术，这是不可想象的。船尾舵的发明，在造船史上有特殊意义。船尾舵使操作者能轻便灵活地掌握船向。橹和布帆的使用大大提高了船的推进效率，又运用自如。船特别适用于运输量大、运距远的货物。1976 年在广州发现一处规模巨大的秦、汉造船工场遗址，据现存船台遗迹估计，当时可造宽 6～8 米，长 30 米，载重 50～60 吨的木船[①]。

汉代纺织业十分发达，作坊甚多。并设有工官专门管理。在发达的城市里，有众多的富商大贾经营的手工业作坊。几乎每个农民家庭都有手工纺织。纺车已成为普遍的纺织工具，脚踏提综

① 广州市文物管理局等. 广州秦汉造船工场遗址试掘. 文物. 1977 (4): 1～17

的织机也被广泛使用，这样，操作者就可以腾出手来更快地投梭引纬、打纬，从而提高了织布的速度和质量。

西汉还出现了提花机，其结构已十分复杂，能织复杂的花纹组织。巨鹿人陈宝光的妻子善织花纹鲜艳的蒲桃锦和散花绫，一匹价值万钱。纺织品的种类很多，有绡、纺、缟、纨、绨、罗、绮、锦等品种。官营作坊主要生产锦、绣、纱等贵重品种。近代出土的一件素纱禅衣，薄如蝉翼，轻若云烟，仅重 49 克，与今天尼龙纱相仿。印染水平已大大提高，纺织物染得五色缤纷，鲜丽夺目。据分析，主要用植物染料。反映了当时从纺织到印染的高超技术。

5. 天文历法、地学及医学

秦汉时代，中国的天文历法是一个辉煌的时期。实行阴阳合历的中国传统历法体系已形成。二十四节气已成定型。长沙马王堆出土的帛书《五星占》，给出了从公元前 246 年到前 177 年间，木星、土星、金星的位置表和它们在一个会合周期内的动态表。另绘有 29 幅彗星图，显示了当时人们对彗星观测的精细程度。人们还准确地记录了大量天文现象，像太阳黑子、日食、月食、超新星、流星雨、极光等，为现代天文科学研究提供了有价值的资料。

汉代天文学上一项成就是三家宇宙学说形成。这三家学说是盖天、浑天和宣夜说。盖天说思想起源很早。它认为地是平的，天像圆盖一样罩在地上面。宣夜说认为苍茫辽阔之宇宙、无际无涯，日、月、星辰浮于虚空之中。浑天说认为天是一个浑圆的天，而地是一个拱形的地。这些宇宙理论都是思辩性的论述，没有任何具体的论证，并且对于其中的矛盾视而不见。

马王堆出土三幅汉代地图，即地形图、驻军图和城邑图，绘制的精度非常高，这反映了当时测绘水平非常高超。

对医学来说，秦、汉是一个重要时代。大约成书于战国时期，在汉代又有所增补的《黄帝内经》奠定了中国医学的理论体系基础，从此以后 2000 余年来的中医理论都是在它的基础上加以发挥

而已。药物理论也成熟了，《神农本草经》是一部现存最早的药物学专著。它集当时中国药物知识之大成，共收药物 365 种。对每味药的性能、种植、使用方法都有详细记载。许多记载的正确性已被现代科学研究所证实了，至今还有使用价值。1983 年在湖北江陵张家山出土了一批汉简，其中有《脉书》、《引书》。前者是讲脉学的书，后者是讲体育疗法。这从一个侧面反映了当时医学理论的发达。

第三节　科学专著与专业科学家的出现

由于科学技术知识的大量积累和客观需要，秦、汉（特别是西汉）时完成了许多科学著作，并出现了一批有明确记载的科学家。

1. 科技专著的出现

知识积累到一定程度，就需要对它加以整理，使它条理化、系统化，这有两个含义：一是指知识的外在形式，指把知识分类，整理成册，或编辑成丛书，以利于保存，像汉代政府派专人到民间广征图书，然后命刘向父子加以整理、汇编等活动；另一类是知识的内在内容，就是指学科间越分越细，每一学科知识逐渐系统化，其理论趋于完善。

知识系统化的一个具体表现是出现学术专著。春秋战国时代虽出现过《考工记》、《天文星占》等科技著作，但为数不多，有的还不够成熟 。大批的纯粹科技专著是出现在汉代，并且学科分的更细、学科也增多了。《汉书·艺文志》共收了图书 13 269 卷，共中有农书 9 家，114 篇，数术类 190 家，2 528 卷，方技类 36 家，868 卷。这些虽不全是自然科学内容，但也在某种程度上反映了当时科学专著之多，并且它还有明显的遗漏。1983 年湖北江陵张家山出土一批竹简，有汉律，《奏谳书》、《盖（阖）庐》、《脉书》、

《引书》、《算数书》、《日书》、《历谱》、遣册[1]。没有流传下来农学书《氾胜之书》。天文历法上的《太初历》、《周髀算经》、医学上的《神农本草经》，畜牧学上的《相六畜》等一大批科学专著，有的就是《艺术志》中所未收的。

大批科学专著的出现，意义十分重大。首先，一个民族的科学理论的发展和成熟是以科学专著出现为前提的，只有口传的科学知识是难以导致科学理论的成熟。其次，它能加快科学的发展速度。只有科学专著出现，才能使后人比较容易地接受和继承前人的科学成果，并有所发展。口头传播固然后人也能继承前人成果，但受到时间和地域的很大限制，零星的科学知识夹杂在别的书中很难吸引人去系统学习自然科学知识。在某种意义上说，只有科学专著的出现，才能使科学（在严格意义上讲，纯粹的经验不是科学）从少数人的书斋中走到知识分子中和民间去 。

2. 专业科学家的出现

科学知识积累的另一个标志是专业科学家的出现。世界上任何一个民族都经历过一个类似的过程：当科学刚诞生时，没有专业科学家。早期一个人可以在哲学、科学等方面有成就。直到春秋战国时期，中国虽然有些人在科学上作出了很大成就，但大都不是从纯科学角度去研究科学的，像墨翟，他在数学、物理上作过研究工作，但主要是为了给他的哲学思辩找论据。不能说他是一个专业科学家。也许在天文历法、医学等少数领域是例外。因为这是关于国家和人的生命的大事，需有专人来做。在秦、汉时代就不同了，专业科学家出现了一大批，像张苍、落下闳、邓平、淳于意、耿寿昌、许商等都是有名的科学家。数学家见诸文献的不多，杜忠著《算术》16 卷，他可能是数学家。其中张苍、耿寿昌、许商都是数学家，有的还著过数学专著。下面主要介绍一下

---

① 张家山汉墓竹简整理小组. 江陵张家山汉简概述. 文物，1985（1）：9～15

张苍、耿寿昌和许商的事迹。

张苍（？～前152年），阳武（在今河南省原阳县东南）人。“好书律历。秦时为御史，主柱下方书”。也就是主管图书典籍。后犯法逃亡。刘邦起事后，张苍随之南征北伐。因有军功，汉高祖六年（公元前201年）封北平侯，食邑千二百户。迁为计相。裴骃集解说：“文颖曰：‘能计，故号曰计相’”。是时萧何为相国，而张苍乃自秦时为柱下史，明习天下图书计籍。苍又善用算律历，故令苍以列居相府，领主郡国上计者”。公元前180年，吕后死后，周勃与陈平等尽诛诸吕，张苍升为御史大夫。公元前165年有人言汉应属土德，改元，而张苍不听，得罪了皇帝，公元前162年，他只好托病去官。孝景五年（前152年）卒。谥为文侯。

张苍是现今有详细记载的中国最早的数学家、天文学家。他一生又侍二朝，均任高官。由于张苍在秦朝管文书典籍，善天文历算，为汉政权建设立下功劳。伟大的司马迁极有见识地评价：“自汉兴至孝文二十余年，会天下初定，将相公卿皆军吏。张苍为计相时，绪正律历。以高祖十月始至霸上，因故秦时本以十月为岁首，弗革。推五德之运，以为汉当水德之时，尚黑如故。吹律调乐，人之音声，及比定律令。若百工，天下作程品。至于为丞相，卒就之，故汉家言律历者，本之张苍”[①]。一个新朝建立，要颁布新的历法。而汉功臣多为行武军人，独张苍通数学、律历。

张苍的主要科学成就是天文历算，“著书十八篇”[②]《汉书·艺文志》曾记张丞相著书十六篇，二者矛盾。我们认为《艺文志》误。这可能是《汉书》在1000余年间传抄、翻印所致：古书纵式成行，也许是抄写时将“十”字写重了，后人误将第二个“十”字与下面的“八”字相连而成“六”，因而出现这一矛盾结果。另外，李

① 前面关于张苍的引文均为《史记》卷96。

② 《汉书》卷42“张苍传”。

俨在《中国古代数学史料》(上海科学技术出版社，1963 年)说张苍"著书八十篇"，疑为"十八"颠倒而来。《汉书》在此条下有"言阴阳律历事"。司马迁说："汉相张苍历谱五德，上大夫董仲舒推《春秋》义，颇著文焉"[①]。司马贞索隐曰："张苍著《终始五德传》也"。也许此书就是《艺术志》中记载的那部"十八篇"的著作，是否确实如此，尚需进一步研究。《始终五德传》一书从名字上看大约是讲阴阳五行相生相克的。这些思想以后成为历代统治者建国号的"理论基础"。而张苍终于因为它而罢官，"苍为丞相十余年，鲁人公孙臣上书言汉土德时，其符有黄龙当见。诏下其议张苍，张苍以为非是，罢之。其后黄龙见成纪，于是文帝召公孙臣以为博士，革土德之历制度，更元年。张丞相由此自绌，谢病称老"。司马迁就此批评他说："张苍文学律历，为汉名相，而绌贾生、公孙臣等言正朔服色事而不遵，明用秦之《颛顼历》，何哉?"[②] 这种天文思想对后世有相当的影响。

张苍是否写过专门的数学书，不见于经史记载。他以前曾主管过秦廷的图书典籍，对以前的科学书一定很熟悉，入汉之后，他又长期任计相。当时天文历法、土木工程要用到相当复杂的计算，张苍精通计算是很自然的事。刘徽说："往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌，皆以善算名世。苍等因旧文之遗残，各称删补"[③]。这也许另有所据。我们认为此话是可信的。《九章算术》中有先秦或更古老的内容，这为多数学者所承认。这是经过张苍的删改而残留下来的，应当是可信的。根据现传《九章算术》内容来看，张苍作为删补者必是具有很高数学水平，无疑应是当时最大的数学家。

---

① 《史记》卷 14。

② 《史记》卷 36。

③ 刘徽.《九章算术原序》。

总之，张苍在科学上有很大贡献。所以，司马迁说："汉既初定，文理未明，苍为主计，整齐度量，序律历。作张丞相列传第三十六"[1]。说明他为什么为张苍作传。

耿寿昌，汉宣帝时（前73～前48年）人，生卒年月不详。关于他生平的详细情况，我们知道的很少，"宣帝即位，……时大司农中丞耿寿昌善为算，能商功利，得幸于上"[2]。由于他善于计算，长于运筹，竟受到了刚上台的汉宣帝的赏识，可见他在数学方面的成就在当时是影响极大的。刘徽说耿寿昌曾删补过《九章算术》[3]，可见他必定在数学理论方面有高深造诣。

耿寿昌把数学应用到社会实践中去，颇有成效。"五凤中奏言：'故事，岁漕关东四百万斛以给京师，用卒六万人。宜籴三辅、弘农、河东、上党、太原郡谷，足供京师，可以省关东漕卒过半'。又白增海租三倍。天子皆从其计。"[4] 五凤系汉宣帝年号，公元前57至前54年。他的才干遭到了御史大夫萧望之的忌恨，萧望之上奏说："'……（耿）寿昌习于商功分铢之事，其深计远虑，诚未足任，宜且如故'。上不听，漕事果便。"他擅于运筹，"寿昌遂自令边郡皆筑仓，以谷贱的增其贾而籴，以利农；谷贵时减贾而粜，名曰常平仓。民便之，上乃下诏，赐爵关内侯。"[5] 另有记载：他在边疆储备粮食。"耿中丞（寿昌）籴二百万斛谷，羌人不敢动矣。"[6]

又由于他善商功，因而他主持了不少土木工程，宣帝的陵墓

---

① 《史记·太史公自序》。
② 《汉书．食货志》。
③ 刘徽．《九章算术原序》
④ 《汉书．食货志》。
⑤ 《汉书．食货志》。
⑥ 《汉书》卷69，"赵充国辛庆忌传"。

就是他主持修建的[①]。

耿寿昌不但在数学方面有很大成就，而且在天文学方面也颇有造诣。他主张浑天说，对后世很有影响，同时在天文仪器制造上有很大成绩。扬雄指出："或问浑天，曰：落下闳营之，鲜于妄人度之，耿中丞象之，几乎几乎莫之能违也。"[②] 说明耿寿昌制造了能够观测天象的浑仪。又有记载说："甘露二年（前52年）大司农中丞耿寿昌奏：以图仪度日月行，考验天运状。"[③] 人们一般认为，耿寿昌改进了浑仪，加上一个赤道环。他还著有《月行帛图》232卷和《月行度》2卷两书，[④] 卷帙如此之大，内容一定很丰富。从书名看，大约是研究日月的运行规律，其中可能包括了许多他用改进了的浑仪观测的结果，也会包括相当多的计算。耿寿昌的书早已失传，详细情况就无法确知了。

许商，字长伯，长安人。他曾受业于周堪[⑤]。永始三年（前14年）为少府。元延二年（前12年）为光禄大夫。绥和元年（前8年）为大司农。数月后迁为光禄勋，四月迁[⑥]。

许商一生授业弟子甚多。"商善为算，著《五行论历》，四至九卿，号其门人沛唐林子高为德行，平陵吴章伟君为言语，重泉王吉少泉为政事，齐炔钦幼卿为文学。王莽时，林、吉为九卿，自表上师冢，大夫博士郎吏为许氏学者，各从门人，会车数百辆，儒者荣之。钦、章皆为博士，徒众尤甚"[⑦]。培养了许多各方面的人材，是许商一大贡献。

---

① 《汉书》卷70"傅常郑甘陈段传"。
② 扬雄：《扬子法言》。
③ 《后汉书·律历志》。
④ 《汉书·艺文志》。
⑤ 《汉书》卷88"周堪传"。
⑥ 《汉书》卷88"周堪传"。
⑦ 《汉书》卷19下"百官公卿表"。

《汉书·艺文志》注有《许商算术》二十六卷，早已失传。从“二十六卷”推测，该书内容必定十分丰富，如果平均每卷有10道题，全书就有260题，算是一部大书了。

由于许商善于计算，因此，他曾主持了许多土木工程，最著名的是堵黄河决口。

成帝初，清河都尉冯逡奏言治河，事下丞相、御史，白博士许商治《尚书》，善为算，能度功用。遣行视，以为屯氏河盈溢所为，方用度不足，可且勿浚。

公元前26年，黄河复决平原，流入济南、千乘。“杜钦说大将军王凤，以为‘前河决，丞相史杨焉言延世受焉术以塞之，蔽不肯见。今独任延世，延世见前塞之易，恐其虑害不深。又审如焉言，延世之巧，反不如焉。且水势各异，不博议利害而任一人，如使不及今冬成，来春桃华水盛，必羡溢，有填淤反壤之害。如此，数郡种不得下，民人流散，盗贼将生，虽重诛延世，无益于事。宜遣焉及将作大匠许商、谏大夫乘马延世杂作。延世与焉必相破坏，深论便宜，以相难极。商、延年皆明计算，能商功利，足以分别是非，择其善而从之，必有成功’。凤如钦言，白遣焉等作治，六月乃成”。

鸿嘉四年（前17年），勃海、清河、信都河水灌县邑三十一。“河隄都尉许商与丞相史孙禁共行视，图方略”。孙禁认为可开堤分水，许商反对，并举出许多理由，认为他的方案不可行。“公卿皆从商言”，要“修政以应之，灾变自除。……于是遂止不塞”[1]。

许商在治理河道过程中，需要大量测量、计算知识，这为他科学知识的积累有相当促进作用。《汉书·艺文志》中有许商《五行传记》一篇。

① 《汉书》卷29“沟洫志”。

第二章 竹简《算数书》与三阶纵横图

《算数书》是近年刚出土的一部重要数学专著，由于它的出土，给中国数学史研究提供了许多新资料；由于它的出土，改变了中国数学史研究的某些观点；由于它的出土，把中国传统数学的成就提前了很多年限；由于它的出土，证实了中国古代数学研究的一些论断。但是，因为《算数书》的全部内容尚未公诸于世，本章所论只能对《算数书》作一概括介绍。

纵横图在西汉时期已有一些资料，主要是三阶纵横图的使用相当普遍。因此，在本章列入一节予以讨论。

第一节 《算数书》的出土概况

《算数书》的出土，是一项惊人的重大发现，为了研究《算数书》一切学术价值，我们必须了解它的出土概况。

1. 湖北江陵县张家山，位于江陵县城正西偏北，约1.5公里处，而江陵县在武汉正西偏南约270公里处。张家山居于长江之北，沮漳河之南，现属于江陵砖瓦厂所辖[①]。

1983年，当江陵砖瓦厂在张家山取工业用土时，发现有三座古墓，便从1983年12月到1984年1月与荆州地区博物馆、江陵县文物局共同清理，并从西至东给出这三座古墓编号分别为M258，M247，M249。

① 城地茂．中国湖北省江陵县张家山遗迹出土《算数书》しついて．（日本）数学史研究，1988年，通卷117号。

三座古墓都是长方形墓坑，其墓坑上口较大，下底略小，四壁陡斜，不设墓道。墓坑中置有椁、棺，皆为木制。椁内有头箱、边箱之分，椁内置棺，椁外皆用青膏泥填实。这三座古墓基本上都是竖穴椁棺墓，是属于秦汉墓的形制[①]。

除M258墓破坏严重，无法勘测外，其M247、M249两墓，尚较完整。

M247墓口长3.48米，宽1.58米，深1.20米；其椁长3.29米，宽1.40米，高1.15米；其椁盖由七块木板组成，横铺于椁室之上；其棺长1.90米，宽0.60米，高0.66米；棺内涂以红漆，棺外涂以黑漆，挖掘时，墓坑、椁棺之内积满淤泥，棺内之尸骨早已腐朽[②]。

M249墓口长4.42米，宽2.84米，深1.84米；其椁长3.30米，宽1.86米，高1.46米；其椁盖也是由七块木板组成，横铺在椁室之上；其棺长2.02米，宽0.67米，高0.73米；棺内涂以红漆，棺外涂以黑漆，挖掘时积满淤泥，棺内尸骨已腐朽无存[③]。

因张家山为江陵砖瓦厂所辖，经常挖取工业用土，所以，这三座古墓距地面的实际深度则无法测定。

根据这三座古墓的形制、墓穴及棺椁的大小、出土及随葬物品，经过专家的考证，认为这三座古墓是西汉初期吕后时代的古墓，而墓主人尤其M247的墓主人可能是社会地位不高的文职小官吏。

2. 在张家山所挖掘的三座古墓中，出土的随葬品有多种，计有铜器、陶器、漆器、竹木器等，初步统计，约有160多件。

在三座古墓出土的物品中，仅就竹简而论，不但数量较多，而

---

① 陈耀钧、阎频. 江陵张家山汉墓的年代及相关问题. 考古，1985（12）

② 荆州地区博物馆. 江陵张家山三座汉墓出土大批竹简. 文物，1985（1）

③ 荆州地区博物馆. 江陵张家山三座汉墓出土大批竹简. 文物，1985（1）

内容也极其丰富，实为近年来所罕见。这批竹简，为研究西汉有关学术问题，提供了异常珍贵的文字资料。

3. 如前所述，在这三座古墓出土的物品中，数学方面除有一捆竹质算筹外，就是珍贵的竹简《算数书》。在一竹简背面发现有“算数书”三字，便认为是此书的书名。《算数书》全书竹简约200枚，其中整简180余枚，其他已残断。由竹简的痕迹可以断定，竹简是由三道韦编连接起来的。可惜的是，韦编已腐烂。

《算数书》竹简全部文字约7000字，字体为隶书，一般是用墨笔写在竹黄一面。简头只写小标题，或无文字；简尾除个别写有“王”或“杨”字外，一般没有文字，“王”、“杨”可能是书写者的姓氏；《算数书》的内容，则写在竹简中间部份，每枚竹简的字数多少不定。

《算数书》全书未见分章分卷，但有60多个小标题，该书可能是由小标题的形式组成的。小标题是“相乘”、“合分”、“增（增）减分”、“分乘”、“径（经）分”、“约分”、“石衡”、“少广”、“方田”、“税田”、“出金”、“铜耗”、“贾盐”、“息钱”、“负炭”、“程禾”、“金贾（价）”等[①]。

根据挖掘者的有关报道，我们知道：有的小标题之下，有一应用问题；有的小标题之下，有一计算问题；也有的小标题之下，不设问题只有计算法则；还有20多个问题之前没有小标题。《算数书》全书是由80多道问题组成的。

可以看出，《算数书》乃不分卷、不立章，是由60余个小标题组成的问题集，基本上每一问题都是由“问”、“答”、“术”三部分组成的。因此，可以说《算数书》是一部60余个标题由问、答、术组成的问题集。

---

① 陈跃钧，陈燕萍.《算数书》与《九章算术》. 见：武汉大学学报编辑部. 湖北省考古学会论文选集（1）. 1987

第二节　《算数书》的内容

《算数书》的出土，在学术界虽然是一项重大的发现，但是，迄今为止，尚未公布《算数书》的全部内容。这里只能根据已发表的有关报道，作一简要的分析与介绍。

1. 古墓M247所出《历谱》的纪年共17年，根据考证，这17年当是高祖刘邦五年（公元前202年）至高后吕雉二年（公元前186年），可见《历谱》的下限当是吕后二年。

古墓M247所出《律令二十六种》，经过专家考证，认为此律令成文于吕后二年（公元前186年），专家的考证是可以征信的。

古墓M247所出《盖庐》，是一部兵家著作，记载了盖庐即吴王阖闾（公元前？～前496年）与伍子胥（公元前？～前484年）的对话。《盖庐》的成文年代，当不晚于战国末期（即公元前221年）。

古墓M247所出《奏谳书》是一部议罪案例的汇编，根据介绍，其中记载了春秋时期的案例，也记载了秦始皇时期的案例，但大多数的案例是汉高祖时期的。据此，不难推断《奏谳书》的成文年代必在汉高祖以后。

总上所述，M247墓主人可能死于吕后二年或吕后二年以后不久。而M247所出《算数书》的成书年代，必然在吕后二年之前。

至于《算数书》的作者，仔细查阅竹简，并未发现写有作者的痕迹，虽然在一些竹简的尾部写有“王”字或“杨”字，如前所述，这可能是代墓主人抄写《算数书》的代笔人的姓氏。

《九章算术》刘徽序称：“往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补，故校其目则与古或异，而所论者多近语也。”又因《算数书》的内容与《九章》极为相近，所以有人以为张苍

删补过的算书与《算数书》的内容可能相同。现今既未发现张苍删补的算书，又未公布《算数书》的全文，这种结论，似嫌过早。如以为《算数书》可能是《九章》的母本，或者两书具有共同的渊源。[1] 这样论说，或较客观。

在M247墓所发掘的《算数书》，是一项重大发现，仅就资料而论，是十足珍贵的。但是，这样珍贵的资料，在历代经籍中却不见诸记载。考其不见记载的原因，可能是：

(1)《算数书》不是名著，对社会影响不大，不当载入史册。

(2)《算数书》流传不广，知者甚少，经籍编纂者未及此书。

(3)《算数书》是M247墓主人辑录或编撰之稿本或誊抄本，未及流传。

(4)《算数书》是形成《九章算术》的母本之一，《算数书》尚未成为定本。

《算数书》未收入经籍也许有别的原委，这里不必再行猜测，总之有关《算数书》的成书确切年代、作者、流传概况等，应有进一步探讨的必要。

2.《算数书》60余个小标题可分为两类，一类是算法，一类是算题。算法的小标题如“相乘”、“合分”、“增（增）减分”、“分乘”、“径（经）分”、“约分”等，这些算法的内容有“一乘十，十也。十乘万，十万也”。“少半乘少半，九分之一也”。即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$。“四分乘五分廿分一”。即$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$。“半乘一，半也”。即$\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$。“增减分：增分者增其子；减分者增其母。”即是说所谓增分，可以用增大其分子；所谓减分，可以用增大其分母。这

---

① 李学勤. 中国数学史上的重大发现. 文物天地，1985 (1)

是给出扩大分数值或缩小分数值的一般算法。意即 $\frac{b+n}{a}>\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a+n}<\frac{b}{a}$；或者 $\frac{b\times n}{a}>\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a\times n}<\frac{b}{a}$（其中 a，b，$n>1$）。在这些算法竹简里，有整数及分数的加、减、乘、除具体算法，也有一般算法。就整数与分数的算法而论，是比较齐全的。

另一类算题的小标题有“石衡”、“少广”、“出金”、“铜耗”、“方田”、“贾盐”、“税田”、“息钱”、“负炭”、“程禾”、“金贾（价）”等，在这一类标题之下，列有结合当时生产实践的应用问题。

在《算数书》里这类应用问题最多，有的标题之下有一题，有的标题之下有多题，全书约有50余道应用问题。

例如“息钱”下题为：“贷钱百，月息三。今贷六十钱，月未盈，十六日归，请息几何。得曰：卄五分钱卄四。术曰：计百钱一月积钱数为法，直（置）贷钱以一月百钱息乘之，有（又）以日数乘之为实。如〔法〕得一钱。”

其算法为：法：100钱×30日＝3000钱，

实：60钱×3钱×16日＝2880钱，

息：$2880\div3000=\frac{24}{25}$钱。

又如“少广”下题为：“广一步、半步。以一为二，半为一，同之三，以为法。即直（置）二百卅步，亦以一为二，除如法得纵步。为纵百六十步。”①

图3·2·1
《算数书》竹简

① 在“半步”之下，“以一为二”之前，似脱落问纵几何一类的词句；且答案“为纵百六十步”似应在“以一为二”之前。今存疑。

其算法为：法：$(1\text{步}+\frac{1}{2}\text{步})\times 2=3$，

实：240 步×2＝480，

纵：480÷3＝160 步。

由这些例子看来，《算数书》每一应用问题都是由问、答、术三部分组成的，实际上这是符合中国传统数学的结构的。

此外，《算数书》还有些从属于其他标题的问题，实际是“商功”、“均输”、“盈不足”的问题。

3. 数学史工作者以前认为成书于东汉初期的《九章算术》，是流传至今最古的数学书，《算数书》的发现，改变了这种看法。经过考证，认为《算数书》的成书年代，不晚于吕后二年，也就是说《算数书》的成书早于《九章》二三百年。流传至今最古的数学书，当推《算数书》。

《九章算术》第六章是均输章，均输术就是按人口多少、路途远近、谷物贵贱平均交纳租税或摊派徭役的计算方法。因为《汉书·食货志》称：“桑弘羊为大司农丞，管诸会计事，稍稍置均输，以通货物矣。……，元封元年（公元前 110 年）……，各往往县置均输盐铁官”。便认为汉武帝于元封元年根据桑弘羊的建议，实行均输制。而《九章》均输章即是汉武帝均输制的计算方法，以此确定《九章》成书于公元前 110 年之后。但是，在 M247 古墓所出竹简《律令二十六种》中有“均输律”，《算数书》也有按照均输术计算的问题，因此，可以断定《九章》均输章绝非依据汉武帝均输制制订的，如前所述，均输律不晚于吕后二年，均输术可能依据均输律制订的。

《周礼·保氏》称：“养国子以道。乃教之六艺：……，六曰九数”。东汉郑玄引郑众注称：“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、盈不足、旁要。今有重差、夕桀、句股”。郑

玄之说正确无误，并不是“以《九章》来释‘九数’的”。[1] 刘徽《九章算术注》序称：“周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣”。不仅可为郑玄注的旁证；而《算数书》有相当于《九章》的方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足章的问题，缺少句股章的问题。对郑玄注文也可看作是一次验证。

《九章》共有 246 问，隶为九章。全书共计 202 术，有的是一问一术，有的是一问多术，也有的是多问一术。《算数书》共有 80 余问，60 多个小标题，基本上是一标题一问或两问，而一标题一术。《算数书》的术不仅分别同于《九章》的术，其内容也是十分相近的。

如前所述，《算数书》“息钱”、“少广”下之问题，分别相似于《九章》衰分章第 20 问、少广章第 1 问。

今将《九章》两问抄录如下，以资比较：

衰分第 20 问为：“今有贷人千钱，月息三十。今有贷人七百五十钱，九日归之，问息几何。答曰：六钱四分钱之三。术曰：以月三十日乘千钱为法。以息三十乘今所贷钱数，又以九日乘之为实。实如法得一钱”。

少广第 1 问为：“今有田广一步半。求田一亩，问从几何。答曰：一百六十步。术曰：下有半，是二分之一。以一为二，半为一，并之得三，为法。置田二百四十步，亦以一为二乘之，为实。实如法得从步”。

综上所述，《九章》起点于分数，《算数书》起点于整数，不仅《九章》起点高于《算数书》；而《九章》内容全部包括了《算数书》的内容；《算数书》编写词句也略逊于《九章》，不及《九章》的完备、系统。两书不论在体例上、内容上、结构上都有一

---

[1] 杜石然. 江陵张家山竹简《算数书》初探. 自然科学史研究，第 7 卷. 1988 (3)

脉相承的迹象，所以，我们认为《九章》可能源于《算数书》，而《算数书》则是《九章》的母本之一。

第三节 《算数书》的出土对中国数学史研究的意义与价值

在《算数书》发掘之前，对中国数学史的研究，一般认为《九章算术》是流传至今最古老的数学经典著作。在研究中，对于中国数学史的时期划分，对于中国数学从萌芽到专著的发展过程，对于中国数学史与当时社会的联系，对于中国传统数学理论体系的形成与发展，莫不借助于《九章》。虽然古籍中记载在《九章》之前有《杜忠算术》、《许商算术》，甚至还有耿寿昌、张苍删补的算书，但迄今都已不传。在数学史研究中，对于这些历史资料，只得厥如。犹如无本之木，无源之水。

《算数书》的发掘，是中国数学史上的一项重大发现，不仅把中国数学史成书的历史提早了 300 年之久，并对中国数学史时期的划分提供了有力的佐证，也给两个时期的连接增加了丰富的内容。随着《算数书》的整理与公布，将使得中国数学史的时期划分在理论上、在史料上日臻佳境。

中国数学史的发展过程是由片断的数学知识积累逐渐形成数学专著，在逐渐形成数学专著的过程，必然涉及承先启后的中间环节。由于《算数书》的出土，不但充实了中间环节的内容，也给中间环节带来了真实凭证。借以说明历史的演变是可以征信的，数学的历史发展过程是必然的。

任何一件事物的形成与发展，总离不开当时社会的条件与因素。中国古代社会政治、经济、哲学等等促进了中国数学的形成与发展，而中国古代数学也反映了中国古代社会的条件与因素。《算数书》的出现，它的丰富内容给研究先秦社会的政治制度、经

济条款、哲学思潮提供了最珍贵的资料。

先秦诸子百家的学术思想对科学的进步、数学的发展，起着巨大的推动作用。而百家争鸣的局面、逻辑思维的发展，对数学的理论化、系统化起着奠基作用。《算数书》的形成，正是在这两种作用下产生的，它不只是继承了诸子百家的学术思想与逻辑思维，使中国古代数学走向理论化、系统化的道路。它也发展了这些学术思想与逻辑思维，使中国数学形成自己独具一格的理论体系。

《算数书》的出现，在中国数学史的研究上是具有深远的意义和巨大的价值的，随着时代的推移，必将促使中国数学史的研究发展到更深的阶段，提高到一个新的研究水平。

第四节　三阶纵横图

在第二编第二章，讨论甲骨文中的数学内容时曾经涉及过纵横图问题，有些数字排列经过位置变换就可以得三阶纵横图。这种情况对后世纵横图的出现，可能有启发作用。然而在商代以后的几百年间，没有找到有关纵横图的资料。三阶纵横图的作成，在中国肯定是相当早的。从现有的资料看，春秋战国时代已有了三阶纵横图，到西汉时则有了较多的应用，成了一种普遍的知识。

汉代流行的九宫数已明确列出了三三纵横图的数字顺序，九宫图是目前公认的世界上最古老的三阶幻方。中国古代关于三阶幻方的确切记录最早出现在什么时候？一直是学术界所关心的一个问题。过去一般认为，三阶纵横图的数字排列顺序始见于《大戴礼记·明堂篇》，其中载："二九四，七五三，六一八"。由于人们对于《大戴礼记》的成书年代说法不一，对于纵横图最早出现的记录也有不同的说法。有学者认为三三纵横图最早见于公元前

一世纪中叶编成的《大戴礼记》[1]。也有学者认为这部书写成于公元 80 年，因而三阶幻方最早的记录见于公元一世纪[2]。上述提法把三阶幻方出现的年代定得都比实际年代要晚得多。考古发掘资料提供的证据表明，早在西汉初年，三阶幻方的数字排列形式已为当时的中国学者所熟知。我们从文献考据方面也可以进一步说明九宫图的数字顺序早在西汉早期或西汉前就已出现了。

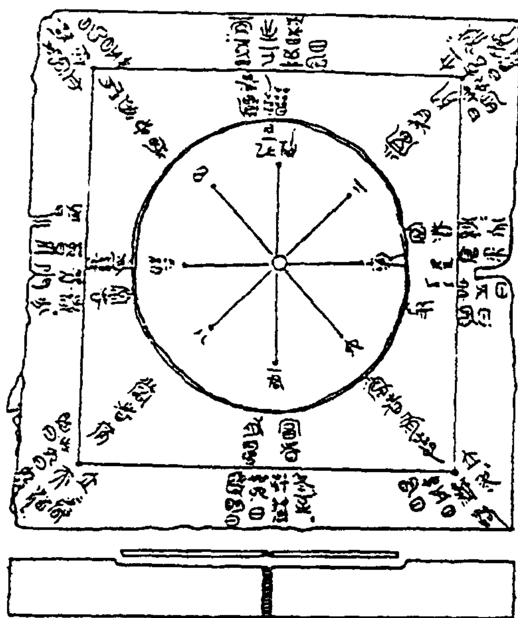


图 3·2·2　太乙九宫占盘

① 夏鼐. 元代安西王府址和阿拉伯数码幻方. 见：考古学和科学史. 北京：科学出版社，1979. 66～67

② Joseph E. Needham. Science and Civilisation in China. III (Cambridge, 1959), 55～62. 又见 S. Cammann. The evolution of magic squares in China. J. Amer. oriental Soc. 80 (1960), 116～117

1977 年在安徽阜阳双古堆西汉汝阴侯墓出土的西汉早期的太乙九宫占盘，为我们提供了早期幻方的重要实物证据[①]（图 3·2·2）这个占盘由上、下两盘构成，上面的小圆盘放在下面方盘的凹槽里，两盘中心有圆孔可以通连。在小圆盘上，过圆心划有 4 条等分线，将圆盘等分为 8 份。等分线两端都刻有字，两端刻“一君”对“九百姓”，“二”对“八”，“三相”对“七将”，“四”对“六”。方盘在圆盘槽外至边缘中间画有一方框线，框内外按四面八方刻字。由于太乙九宫占盘所反映的内容与《黄帝内经·灵枢》“九宫八风篇”完全一致，可以断定上下盘配合的初始位置关

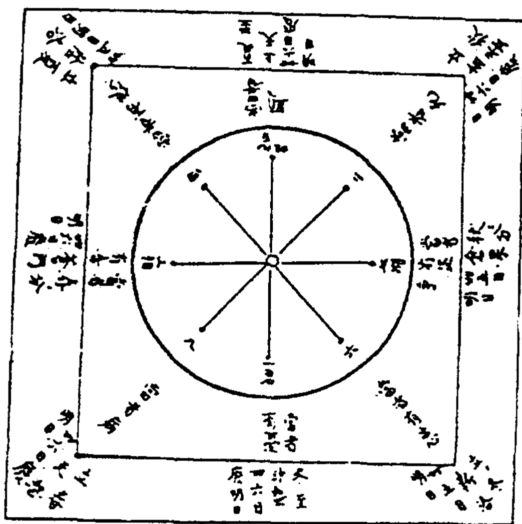


图 3·2·3 太乙九宫占盘释文

系如图 3·2·3 所示。小圆盘上所刻的数字已明确给出了三阶幻方的数字排列形式。除了居于中央的“五”未明标外，其余 8 个方位上的数都已具备。五所占的位置比较特殊，即使不标也是清

① 安徽省文物工作队等. 阜阳双古堆西汉汝阴侯墓发掘简报. 文物，1978（8）

楚的。

九宫占盘的九宫名称和各宫对应节气的日数都与《灵枢·九宫八风篇》的记载完全符合。《九宫八风篇》载："立秋二，玄委西南方；秋分七，仓果西方；立冬六，新洛西北方；夏至九，上天南方；招摇中央；冬至一，叶蛰北方；立夏四，阴洛东南方；春分三，仓门东方；立春八，天留东北方。"又载"太一常以冬至之日居叶蛰之宫，四十六日明日居天留；四十六日明日居仓门；……四十五日明日复居叶之宫。"该篇的篇首图（图3·2·4）与占盘的刻画完全一致，而"君"、"百姓"、"相"、"将"等，也都是《九宫八风篇》中的内容。如果用数字代表图3·2·4中各宫的文字，便是一个三阶幻方图（图3·2·5）。这图三行和三列上的数相加等于15，两斜线上的3个数相加也得15。这种 n^2 个自然数排成一个 $n\times n$ 的方阵图，其每行、每列、两对角线上的数字和均为 $\frac{1}{2}n\ (n^2+1)$。九宫图在中国很早就已出现，这一事实表明世界上最古老的幻方起源于中国。

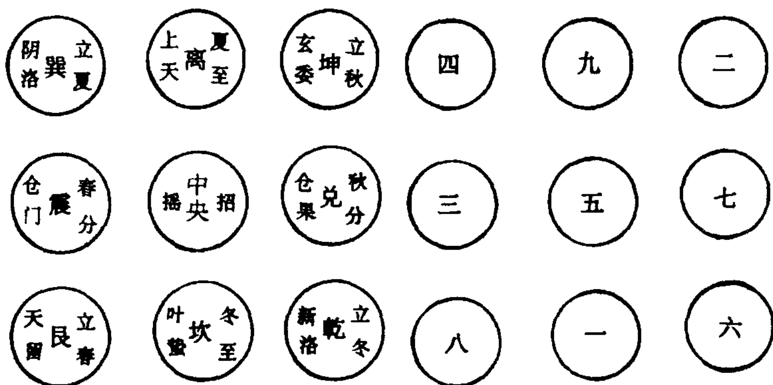


图 3·2·4 《灵枢》九宫八风图　　图 3·2·5 九宫幻方图

九宫占盘是西汉第二代汝阴侯夏侯灶的随葬器物，夏侯灶死于文帝十五年，即公元前165年。另外占盘背面刻有“七年辛酉日中冬至”，经推算汉文帝七年（公元前173年）的冬至日正逢辛酉，由此不难确定占盘的制作年代。太乙九宫占盘的出土，可以使我们确知幻方发明年代的下限。《黄帝内经》包括现存的《素问》和《灵枢》两部分，其成书年代一般被定为战国至秦汉时期。但有人怀疑其中有些内容出至东汉乃至隋唐时医家之手。九宫占盘的刻划所反映的内容与《灵枢·九宫八风篇》完全一致，可以由此推断《九宫八风篇》为秦、西汉时期或秦汉之前的作品。这同时证明至迟在西汉时九宫的位置模式已成为占卜和医学学说的依据，而九宫数的最早出现当在汉代之前。

九宫数在西汉时期已很通行，这已无疑问。在东汉以前的作品中还可以找到取用九宫数的记录。《素问·五常政大论》有“眚于三”，“眚于九”，“其眚四维”，“眚于七”，“眚于一”等语；《素问·六元正纪大论》有“灾七宫”，“灾五宫”，“灾一宫”，“灾九宫”等语。在论灾眚方位时，是用“三，九，七，一，五”来代表“东，南，西，北，中”五方，位置与九宫数完全相合。过去有人认为《黄帝内经素问》中的《五常政大论》等“七篇大论”很有后人伪托的嫌疑，最近有人对其真伪问题作了较详细的考证，认为这七篇的内容当是《素问》的原文[①]。

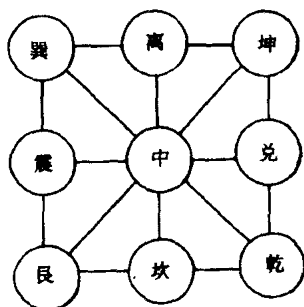
九宫数在东汉前为研究《周易》的纬家理论所取用，乾、坎、艮、震、巽、离、坤、兑八卦各代表一宫，加上中央之宫合称九宫。这与《九宫八风篇》篇首图（图3·2·4）相一致。《易乾凿度》是一部很早的纬书，一般认为其著作年代在西汉之初。该书卷下说：“太一取其数以行九宫，四正四维，皆合于十五”东汉郑玄注说：

---

① 王树芬. 运气七篇考辨. 中华医史杂志，1987（4）

“太一者，北辰之神名也。居其所，曰太一常；行于八卦日辰之间，曰天一，或曰太一。出入所游息于紫宫之内外，其星因以为名焉。……四正四维，以八卦神所居，故亦名之曰宫。……太一下九宫，从坎宫始。坎，中男；始亦言无适也。自此而从于坤宫。坤，母也。又自此而从震宫。震，长男也。又自此而从巽宫。巽，长女也。所行者半矣，还息于中央之宫。既又自此而从乾宫。乾，父也。自此而从兑宫。兑，少女也。又自此而从于艮宫。艮，少男也。自此从于离宫。……行以坎宫始，终于离宫。”

汉代人依据《易·说卦传》，以八卦名目表示八方，震东方，离南方，兑西方，坎北方，叫做四正；巽东南，坤西南，乾西北，艮东北，称做四维（图3·2·6）[①]。根据原文和注文，如用数字表





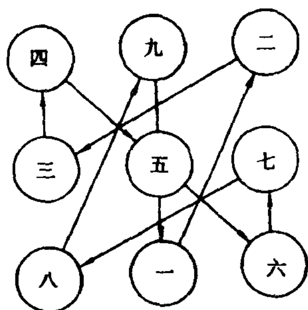


图 3·2·6　九宫图　　　　图 3·2·7　太一行九宫图

明太一下行九宫经过次第，可得图3·2·7，图中箭线表示太一神下九宫周行顺序路线。这个周行顺序图不是偶然的排列，它的“四正四维皆合于十五”，即给出了一个三阶纵横图。由于八卦方位和顺序不能任意变更，因此，图中的太一行九宫顺序也是唯一

① 钱宝琮．太一考．《燕京学报》专号第八，1936年1月。又见《钱宝琮科学史论文选集》，228～231

的。

由于现传的《易乾凿度》前后两卷不像一书的两个部分，而像两种不同的传本，而太一九宫说又是在卷下最后一部分，因而有人怀疑可能为后人附加。[①]但是郑玄的注文在，卷下部分当然在郑玄之前早已存在。把《易乾凿度》及其郑玄注看作是西汉至东汉时期的太一九宫说，当不成问题。

汉唐之后，宋儒综合前人说法，用九宫数来解释《易经系辞》中的"洛出书"。图3·2·8即是他们由九宫图形象而来的洛书，尽管说它是上古传说中的洛书并没有确切的证据，但人们常常将此图看作中国早期文明的象征。由于这张图黑白相对，奇偶有别，均衡对称，很富于想象力，国外许多数学史与组合数学著作在讨论幻方的起源时都引用此图来作说明和装饰，似乎将其看成了组合数学发源的象征[②]。

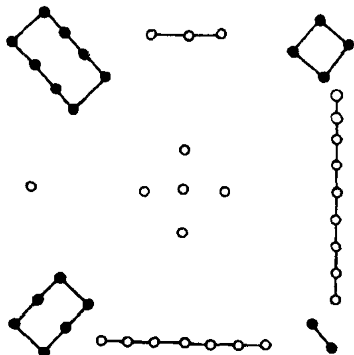


图 3·2·8

我们不排除三阶幻方产生于春秋战国时期或更早时期的可能性，但这不等于认定它在传说中的上古时代已经存在。应该说明的是，世界上最早的幻方带有典型的中国文化色彩，把洛书图或九宫图作为组合数学的象征是有其历史根源的。早期的幻方实际上与西方文化无关，但有些西方学者根据公元二世纪的希腊人赛翁（Theon of Smyrna）的著作中出现的一个数字方阵（排列形式

---

① 钱宝琮. 太一考.《燕京学报》专号第八，1936年1月。又见《钱宝琮科学史论文选集》，228～231

② 罗见今. 世界上最古老的三阶幻方. 自然辩证法通讯，1986（3）

如图3·2·9所示）断言，赛翁给出了“关于幻方的一个最早的暗示（在中国传统之外）”①，或着说“赛翁的著作最早讨论了幻方”②。由于按自然数顺序排出的方阵与幻方仍有本质上的差别，而在赛翁之后10多个世纪内在西方文献中又没有出现幻方的纪录，因而这种提法不能得到数学史界的普遍承认③。实际上，像图3·2·9那样的数字方阵在中国殷商时的甲骨上已多次出现（第二编第二章），尽管我们倾向于认为三阶幻方的产生与甲骨上的数字阵可能有某种联系，但这方面还没有确切的证据。幻方在世界上其它地方出现的年代要比中国晚得多。大约在公元8世纪，中国的幻方思想已传入阿拉伯地区④。到了10世纪，幻方在阿拉伯已取得重要进展。至13世纪末，幻方又由拜占廷传入欧洲，构造幻方的理论进一步丰富了起来。

1	4	7
2	5	8
3	6	9

图3·2·9 赛翁的数字方阵

① G·Sarton. Introduction to the History of Science·Vol·I, 1927. 272

② J·Needham. Science and Civilisation in China. Ⅲ Cambridge, 1959, 61

③ N·L·Biggs. The roots of combinatorics, Historia Mathematica. 6 (1979), 120～121

④ N·L·Biggs. The roots of combinatorics, Historia Mathematica. 6 (1979), 120～121

第三章　简牍中的零星数学史料

竹简和木牍是中国历史上介于鍾鼎与纸之间的一种书写文字的材料，同时并用的还有帛，但因其昂贵，用者不多。流传至今的简牍多属秦到西汉时期，可以说是当时的主要书写材料。在秦汉简牍中包括相当丰富的数学史料，其中有些还相当珍贵。以前曾有人注意到居延汉简中的数学史料[①]，但是直到1984年简牍中的数学知识才在中国数学通史著作中首次找到了自己的位置[②]。甲骨文、金文中的数学史料已在前面讲过，而张家山出土的竹简《算数书》也有了较详细地讨论，这一章我们将集中讲述《算数书》以外的秦汉简牍中的零散数学史料，由此可以初步了解到秦、汉时期数学应用的情况。

第一节　秦汉简牍发现情况

简牍泛指竹条或竹、木板。简是指细长的木条或竹条，牍指较大的用于书写的木板。继战国鍾鼎之后，我国长期以简牍作为书写的材料。汉代虽已发明了纸，但由于纸质粗糙，使用不便，没有立即代替简牍。

简牍的出土汉代就有，汉武帝时有战国竹简出土，著名的《竹书记年》是晋太康三年（公元281年）在河南汲郡（治所在今河南汲县西南）古墓发现的。1899年以后屡有简牍发现，至今已

① 严敦杰．居延汉简算书．真理杂志，1卷3期．1944年5，6月．315～319

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．39～43

有几十批，时间上起战国，下至晋朝[1]，其中秦汉简占多数，达20多批，著名的如云梦睡虎地秦简、敦煌汉简、居延汉简、武威汉简、银雀山汉简、江陵汉简、上孙家寨汉简以及张家山汉简等。为了弄清楚简牍中的数学史料，必须了解有关简牍的一些情况。为了说明问题和以下叙述方便，先择要介绍几批秦汉简牍。

1. 云梦睡虎地秦简

1975年末至1976年春，湖北孝感地区亦工亦农文物考古训练班的学员在湖北云梦睡虎地发掘了12座战国末年至秦代的墓葬[2]。其中在四号墓中出土木牍两件，系从军的名叫黑夫、惊二人写给家里的信。收获最大的是在约葬于公元前217年的十一号秦墓出土大批竹简，共1100多枚[3]。这批秦简的主要内容可分为下列几类：

(1) 秦法律条文。在出土竹简中，约有600多枚与秦法律有关。秦法律是中国封建社会初期的法律，在巩固和加强封建统治方面起过重要作用，对后世有一定影响。汉肖和制九章律就是以秦律为基础的。秦代法律条文久已亡佚，后世虽偶有辑摘，亦为断章残篇。睡虎地秦简中的秦律内容较为系统，律文集中且丰富，为研究秦代社会、政治、法律、经济等提供了重要材料。同时，秦律的发现也使我国保存下来的法律从唐律大大提前了一步。

有关的法律条文可分为三类：一类是法律条文本身，即《秦律》，包括三种。第一种有律文，且有对律文的解释；第二种共有18个篇题，篇题于律文末注明，如《田律》、《仓律》、《厩苑律》、《金布律》等；第三种与第二种类似，亦有篇题。第二类是对刑律

① 边远地区出土的简亦有更晚的。

② 湖北孝感地区第二期亦工亦农文物考古训练班. 湖北云梦睡虎地十一号秦墓发掘简报. 文物，1976 (9)：51～61

③ 湖北孝感地区第二期亦工亦农文物考古训练班. 湖北云梦睡虎地十一号秦墓发掘简报. 文物，1976 (6)：3

的解说。第三类是治狱爰书，首先指明治狱的原则，接着是各种爰书，有标题25个，如《治狱》、《讯狱》、《盗马》、《群盗》等。这些法律文书不是一时之作，其时代早晚有不同，最早的可能早至商鞅所立之法，最晚在秦统一之前[1]。

（2）秦昭王元年（公元前306年）至秦始皇三十年（公元前217年）的《大事记》，记载了这一时期秦对六国的斗争以及十一号墓主喜的生平，虽然每年所记仅几个字或十几个字，却极有价值，它可以为核校史籍提供一些新资料，补充了史籍之不足。

（3）《南郡文书》。此系地方官吏郡守腾发给下级的文告，强调下属要知法、守法，严格执法，不枉法。并派人巡行检查，分良吏和恶吏进行成绩考核。

（4）《为吏之道》等文书。这是一种杂抄文书集[2]，内容论及如何做吏、从政，如何处世接物等。另外还有《日书》等占卜零简。

2. 敦煌汉简

在甘肃西部疏勒河流域曾先后多次出土汉简，习惯上把它们称作“敦煌汉简”。

本世纪初英国考古学家斯坦因（Mark Aurel Stein，1862～1943）曾三次来亚洲进行考古活动，获得大量珍贵文物，并首次发现了敦煌汉简。他在《塞林提亚；中亚和中国西域考古记》及《亚洲腹地，中亚、甘肃和伊朗东部考古记》中报告了1906～1908及1913～1915年两次在中亚考察及出土汉简的情况。这两次共获得汉简789枚，引起世界的轰动。受斯坦因委托，沙畹（Edouard Chavannes，1865～1918）于1913年整理出版了《斯坦因东土耳其斯坦沙漠发现的汉文文书》，我国的罗振玉和王国维据此作了研

---

① 黄盛璋．云梦秦简辨正．考古学报，1979（1）：2～5，15

② 黄盛璋．云梦秦简辨正．考古学报，1979（1）：2～5，15

究，合著《流沙坠简》，影响很大。1953年沙畹的学生马伯乐（Henri Maspero）出版《斯坦因第三次中亚考察所获汉文文书》，对1913～1915年出土的汉简作了研究。我国学者张凤也于1931年出版《汉晋西陲木简汇编》，研究了敦煌汉简。

1944年西北科学考察团在敦煌又获得汉简48枚，阎文儒[1]和夏鼐[2]分别对所获汉简的出土情况和简本身作了报告和考释。

上述三批汉简共837枚。林梅村、李均明详细研究了这些汉简和在疏勒河流域出土的其他文书，将简文重新整理、编排、校释，编成《疏勒河流域出土汉简》一书，于1984年出版，书中包括中文文书共951件。这些文书绝大多数为西汉的，有少数是东汉的。有纪年的简最早为天汉三年（公元前98年），最晚为永和二年（公元137年）[3]。

敦煌汉简的第四次大规模出土是在1979年，这年由甘肃省博物馆和敦煌县文化馆联合组成的汉代长城调查组发掘了敦煌马圈湾汉代烽燧遗址，共出土简牍1 217枚。这批简牍为西汉后期至莽新时期之遗物，有记年的简最早为汉宣帝本始三年（公元前71年），最晚为王莽始建国地皇二年（公元21年），宣、元、成、哀各代均有，尤以平帝至王莽时期居多，占一半以上[4]。

不同时期出土的这些简在内容上却是一致的。敦煌汉简都记录了与汉代边陲屯戍活动有关的内容，丰富多彩，包括烽火品约、烽火制度及烽火设置，还有廪食、赐劳、俸禄、官吏任免等各种簿籍和文书，涉及律令、奏记、诉讼爰书、赋税、财产、商业、雇佣、借贷等多个方面的资料。另外还有一些古书残文，如《易》、

① 阎文儒. 河西考古杂记.

② 夏鼐. 新获之敦煌汉简. 考古学专刊甲种第四号·考古学论文集. 1961

③ 林梅村，李均明. 疏勒河流域出土汉简. 北京：文物出版社，1984

④ 甘肃省博物馆，敦煌县文化馆. 敦煌马圈湾汉代烽燧遗址发掘简报. 文物，1981（10）：1～7

《苍颉篇》等佚文以及历谱、医方、阴阳、占术、算术等各种内容。这是研究汉代敦煌、酒泉等地及至整个汉代的政治、军事、经济、法律、文化、科技的宝贵文献。

3. 居延汉简

居延汉简是我国出土的数量最多的汉简。1930年，西北科学考察团团员瑞典人贝格曼（Folke Bergman）在额济纳河流域汉代遗址发掘获得汉代竹、木简约10 000枚，这批简于1931年运到北京，当时马衡、贺昌群、余逊及劳干等分别做了部分考释，但均未成著作。抗战开始后，这些汉简几经周转，最后落于美国国会图书馆。后来劳干据幸存的部分照片和图版进行研究，著《居延汉简考释》，分为《释文之部》（1943）和《考证之部》（1945）[①]。同时马衡、贺昌群均有研究文稿。贝格曼的《蒙古新疆旅行考察记》四卷（1945）及瑞典人索马斯特勒（Bo Sommarstrom）整理出版的《内蒙古额济纳河流域考古报告》（1956，1958）报告了居延汉简的出土经过及有关事宜。其间，1957年劳干发表了《居延汉简（图版之部）》。1959年中国科学院考古研究所整理出版了《居延汉简甲编》，1980年又出版了《居延汉简甲乙编》，包括图版、释文和附录三部分。

1973年至1974年秋，甘肃居延考古队在破城子及其以南的肩水金关等地共发掘得汉简19 637枚，绝大多数是木简，竹简极少，为使这批汉简与以前在居延出土的汉简相区别，称为“新居延汉简”，目前正在整理之中[②]。

旧居延汉简大部分属于西汉时期，东汉时期的只有少部分，其中有记年的简最早为武帝征和三年（公元前90年），最晚为灵帝

① 中国科学院考古研究所. 居延汉简甲编. 北京：科学出版社，1959. 139～140

② 甘肃居延考古队. 居延汉代遗址的发掘和新出土的简册文物. 文物，1978（1）：1～11

建宁二年（公元169年）[①]。新居延简中有记年的达1 222枚之多，最早的为武帝元朔元年（公元前128年）[②]。居延汉简的内容与敦煌汉简相似，也是汉代边陲屯戍等活动的遗物。因其数量比敦煌汉简多，因而内容也更为丰富全面。居延汉简中有大量完整的简册，弥足珍贵。如旧居延汉简中的《永元器物簿》，完整成册。新居延汉简中有完整和较完整的简册70多个，涉及整个汉代社会的政治、军事、经济、文化、科技、法律、哲学、宗教、民族等各个领域[③]。

4. 长沙汉简

在长沙曾多次出土汉简，其中以马王堆汉墓出土的汉简较为集中。湖南省博物馆1972年春发掘了距长沙四公里的马王堆一号汉墓，获得各种随葬器物共千余件，出土竹简321枚。简长27.6厘米，宽约0.7厘米，总字数2000多，内容为一册随葬器物清单，所记与出土实物大多相符[④]。1973年至1974年，又发掘了长沙马王堆二、三号墓，在三号墓出土汉简610枚，其中410枚为遣册，200枚为医书。遣册记载了随葬品名称和数量，其中有食品、服装、车骑、乐舞、僮仆、兵器、仪仗、乐器以及各种其他器具，同时在木牍上又做了小结。"医书"200简中有木简10枚，其余为竹简，内容与《黄帝内经》相似，可能是黄帝外经[⑤]，同时出土的帛书中

---

① 《额济纳河流域障隧述要》，《居延汉简甲乙编》下册，第299，312页。

② 甘肃居延考古队．居延汉代遗址的发掘和新出土的简册文物．文物，1978（1）：1～11

③ 甘肃居延考古队．居延汉代遗址的发掘和新出土的简册文物．文物，1978（1）：1～11

④ 湖南省博物馆等．长沙马王堆一号汉墓发掘简报．北京：文物出版社，1972．9

⑤ 湖南省博物馆，中国科学院考古研究所．长沙马王堆二、三号汉墓发掘简报．文物，1974（7）：43，46

也含有早已亡佚的医书，如著名的《五十二病方》。

据出土木牍上有："十二年二月乙巳朔戊辰家丞奋移主赞（藏）郎中移赞（藏）物一编书到先选（撰）具奏主赞（藏）君"，可推定三号墓下葬的确切时间，为汉文帝十二年，即公元前168年，而一号墓略晚数年①。

5. 武威汉简

1959年7月甘肃省博物馆在甘肃武威磨咀子六号汉墓清理出竹、木简共504枚，又在十八号汉墓出土的王仗上附有10枚竹简。1964年，经甘肃博物馆和中国科学院考古研究所研究整理，发表了这些汉简的全部释文和图版②。

六号墓属于王莽时期或稍晚一些，出土的汉简的内容除了11枚日忌杂简外，其他是半部《礼仪》，共9篇。其中3篇是一本《丧服》和两本相同的《服傅》。它们可分为三种不同的版本：甲本存7篇，为木简，字大简宽，简长在55.5到56厘米之间，宽0.75厘米。乙本仅存《服傅》一篇，字小简窄，长约50.5厘米，宽约0.5厘米。丙本为竹简，仅存《丧服》一篇。这三种版本在内容上与以往所知本均有所异，对于研究汉代经学有重要价值，同时也为研究汉代文字简册制度提供了重要依据。

1972年11月，又在武威县城南约10公里的旱滩坡的一处东汉早期墓葬内发现木简78枚、牍版14片③。这批木简可分为两类：一类宽约1厘米，共41枚；另一类宽约0.5厘米，共37枚；其长度均为23～23.4厘米。牍版宽在1.1至4厘米左右不等，长

① 湖南省博物馆，中国科学院考古研究所. 长沙马王堆二、三号汉墓发掘简报. 文物，1974（7）：43，46

② 甘肃省博物馆，中国科学院考古研究所. 武威汉简（考古学专刊乙种十二号），北京：文物出版社，1964

③ 甘肃省博物馆，甘肃省武威文化馆. 武威旱滩坡汉墓发掘简报——出土大批医学简牍. 文物. 1973（12）：18～21

度为22.7～23.9厘米，多为两面书写。

这些简牍除有二牍为“禁忌”外。其余全部为医疗记录，包括临床医学、药物学、针灸学以及一些其他内容。其中记录了各科方剂30多个，涉及100多种药物，对各种疾病的病名、病因、病理、症状以及疗法都有详细的说明[①]。

6. 银雀山汉简

这是1972年4月在山东临沂城南约一公里处银雀山上的两座汉墓中发现的，又称“临沂汉简”。这次共出土简4 974枚，其中一号墓内4 942枚。竹简的内容主要是一些重要的军事著作，包括《孙子兵法》及其佚文4篇、《孙膑兵法》16篇、《六韬》14组、《尉缭子》5篇、《晏子》16章、《守法守令》等13篇、《论政论兵之类》50篇，以及《相狗经》等残文[②]。这是一号墓出土的竹书，二号墓出土的32枚竹简系汉武帝“元光元年历谱”（前134年），这对研究西汉历制、校核史籍等都具有重要价值。同时，也可确定墓葬年代为西汉中期。

临沂银雀山汉墓竹简整理小组陆续发表了几部军事著作的释文[③]，吴九龙也按原简顺序发表了《银雀山汉简释文》（1985）。银雀山简竹书价值很高，引起人们的重视。竹书的发现不仅丰富了古代军事知识的宝库，而且使一些长期以来无法弄清的问题得以

---

① 中医研究院医史文献研究室. 武威汉代医药简牍在医学史上的重要意义. 武威汉代医简. 北京：文物出版社，1975

② 吴九龙. 银雀山汉简释文. 北京：文物出版社，1985. 9

③ 临沂银雀山汉墓出土《孙子兵法》残简释文. 文物，1974（12）：11～19；银雀山汉墓竹简（壹），文物出版社，1975. 1～10册；临沂银雀山汉墓出土《孙膑兵法》释文. 文物，1975（1）：1～11；孙膑兵法（银雀山汉墓竹简），文物出版社，1975；临沂银雀山出土《王兵》篇释文. 文物，1976（12）：36～43；孙子兵法（银雀山汉墓竹简）. 文物出版社，1976；银雀山简本《尉缭子》释文（附校注）. 文物，1977（2）：21～34.（3）30～35；银雀山竹书《守法》、《守令》等十三篇. 文物，1985（4）：27～38，银雀山汉简的整理工作仍在进行中。

解决。例如，是否真有孙武和孙膑，他们是一人还是两人？《孙子兵法》与《孙膑兵法》的作者是谁，它们是否伪书？以及其他几部兵书的真伪性等，都得以澄清。证明了孙武、孙膑及其著作的真实性。

7. 江陵汉简

“江陵汉简”发现于湖北省江陵县凤凰山汉代墓葬中。在凤凰山众多的汉墓中有五座出土简牍，它们的编号分别为第八、九、十、一六七、一六八号。八、九、十号三座汉墓是1973年9月至11月由长江流域第二期文物考古工作人员训练班发掘的，出土竹简400多枚，木牍9片，三座墓的年代均属于汉文帝、景帝之时[①]。

八、九两座墓出土的竹简均系遣册，八号墓出简176枚，165枚完整，11枚残。简长约为22.4～23.8厘米，宽0.5～0.8厘米。这些简保存完好，字迹清楚。九号墓出土竹简80枚，保存均差，字迹不清，还有木牍3片，系安陆守丞绾于十六年某月戊申朔壬戌写给其上级的公文。十号墓出土竹简170多枚，木牍6片，十分重要。

十号墓木牍的内容分别为记载随葬物品的清单（1号牍）、契约（2，3号牍）以及各种帐册（4，5，6号牍）[②]。十号墓竹简约1 200字左右，内容为（1）记田租的帐册，（2）谷物帐目，（3）物品价单以及其他帐目。

1975年湖南省纪南城文物保护与考古发掘工作领导小组组织发掘了汉文帝初元十三年（公元前167年）五月十三日安葬的凤凰山一六八号汉墓，出土竹简66枚，共346字，内容为遣册。

① 长江流域第二期文物考古工作人员训练班. 湖北江陵凤凰山西汉墓发掘简报. 文物，1974（6）：51

② 裘锡圭. 湖北江陵凤凰山十号汉墓出土简牍考释. 文物，1974（7）：49～62

在同时出土的一件天平衡杆上的正、背和侧面也有文字，共41字①。同年在凤凰山一六七号汉墓出土木简74枚，保存完整，颜色如初，成册出土，内容为遣册②。

8. 定县汉简

河北定县四十号汉墓是西汉中山王刘修之墓。刘修死于五凤三年（公元前55年），此墓的时间当在此后不久③。1973年5月开始发掘此墓，随葬物品中除了著名的金缕玉衣及其他物品外，也出土了一批竹简。这批竹简残碎严重，完整的不多，其内容主要有下列古籍的残文：时代最早保存文字最多的古本《论语》，其文约存今《论语》的一半；还有《儒家者言》、《哀公问五义》、《保傅传》、《太公》、《文子》、《六安王朝五凤二年正月起居记》、《日书·占卜》等④。

9. 阜阳汉简

"阜阳汉简"是1977年在安徽省阜阳县双古堆一号汉墓出土的。根据同时出土器物的铭文等材料断定，双古堆一号汉墓墓主是西汉第二代汝阴侯夏侯灶，墓葬年代在公元前165年之后，阜阳汉简系汉初遗物⑤。阜阳汉简出土时残乱扭曲严重，几无完简，但内容十分丰富，共含古籍10多种：(1)《苍颉篇》残文，包括《苍颉》、《爰历》、《博学》，现存基本完整的字541个。此书已佚

---

① 纪南城凤凰山一六八号汉墓发掘整理组．湖北江陵凤凰山一六八号汉墓发掘简报．文物，1975（9）：6

② 凤凰山一六七号汉墓发掘整理小组．江陵凤凰山一六七号汉墓发掘简报．文物，1976（10）：32

③ 河北省文物研究所．河北定县40号汉墓发掘简报．文物，1981（8）：12

④ 国家文物局古文献研究室，河北省博物馆，河北省文物研究所．定县40号汉墓出土竹简简介．文物，1981（8）：11～13

⑤ 安徽省文物工作队，阜阳地区博物馆，阜阳县文化局．阜阳双古堆西汉汝阴侯墓发掘简报．文物，1978（8）：17，18

千余年，以前虽有辑佚和零星的残文断简出土，而此次出土的是最多的，意义重大。(2)《诗经》，共整理出100多个破碎的简片，包括今《诗经·国风》中的近60篇，《小雅》中的《鹿鸣》、《伐木》等篇，但无一完好者。(3)《周易》，共300多个残碎的简片，包括今本《易经》中六十四卦之四十多卦，经文和卦画均与今文有相异处，为研究《易经》增加了新内容。(4)《年表》、《大事记》，现存170多片，绝大多数不相连属，上起西周，下迄于汉，记周秦以来各诸侯国君王在位之年。(5)《杂文》，共50余条，其内容有医方、物理现象、物品致用等，还有本草及博物性质的内容，等等。(6)《作务员程》、《相狗经》、《行气》、辞赋、《刑德》、《日书》、《干支表》等残文。另外，还有3片木牍[①]。

10. 上孙家寨汉简

这批汉简发现于青海省大通县南21公里的上孙家寨一一五号汉墓。这座西汉晚期的墓葬是1978年夏由青海省文物考古工作队发掘的，墓葬早年被盗、扰乱严重，出土汉代木简共400片，大多数残断，完整的长25厘米、宽1厘米左右，厚度一般为0.2厘米[②]。

木简内容属于军事方面，有的是当时施行的律令，有的是兵书佚文，可以分为三类：(1)军事律令文书：从目录上看，至少有45章。其中有不少是关于斩首捕虏、论功拜爵或赏赐的条文。(2)军队的编制、阵法和标识：军队编制单位有校、左右部、前后曲、左右官、前后队、伍等，与史书记载或有异处，对于补正史籍有重要意义。关于阵法，不仅有阵式名目，而且还有兵力的

① 文物局古文献研究室，安徽省阜阳地区博物馆，阜阳汉简整理组．阜阳汉简简介．文物，1983（2）：21～23

② 青海省文物考古工作队．青海大通县上孙家寨一一五号汉墓．文物，1981（2）：21

具体部署和阵法的操练等内容。在军队标识方面，用旗、旃、肩章、徽记等不同的标记分辨不同级别的军事单位和军官。(3) 与《孙子兵法》有关的兵书和其他内容[①]。

以上我们介绍了几批较为重要的秦汉简。除此之外，还有十几批简牍是属于秦汉时期的，这里不再一一叙述了。按照本卷计划，只讨论西汉以前的数学内容。考虑到上述各批简牍中主要是西汉的，东汉简极少，同时也不可能一一分辨出来，另外也为了从整体上探讨秦汉简，这一章我们就把秦汉简放在一起讨论，不分时间早晚。下面我们转入探究秦汉简牍中的数学史料的工作。

第二节　简牍中的算术四则运算

各批秦汉简中都不同程度地含有一些数学史料，尤其是居延汉简、敦煌汉简、江陵汉简中的数学内容更为丰富。这些资料是原始的应用实例，比较零散，不像流传下来的数学著作那样系统、集中，但是它们反映了当时数学知识的普及和广泛应用的情况，是中国数学史研究不可忽视的部分。

秦汉简牍涉及的数学内容包括加法、减法、乘法和除法等算术四则运算，还有分数、比例以及面积等。这些数学知识与当时的法律、经济、军事等有密切的关系，它们是通过官员的俸禄、吏卒及其家属的廪食、租赋、税收、诉讼文书、各种帐簿以及劳作屯戍等多方面反映出来的。本书将介绍简牍中的算术四则运算。

1. 加法运算

简牍中的加法运算实例很多，廪食簿、租赋帐、钱粮出入簿等各种帐簿中都含有这方面的例子。简牍中的加法运算不仅有单项加法，而且还有加减、加乘等混合运算，有多项相加的加法，有

① 朱国炤. 上孙家寨木简初探. 文物，1981 (2)：27～34

的达十几项，甚至二十几项。

（1）“凡”、“冣”表示加法。简牍中有不少运算包括在各种帐簿中，与财会记帐关系密切，因此财会上的一些专门术语便成了加法运算的术语，具有加法的意义。其中“凡”、“冣”以及它们的组合“冣凡”等术语表示加法运算的结果。“凡”具有小计、合计的意思，而“冣”即今之“聚”，“冣”或“冣凡”则表示累计、总计。例如：

简1：茭钱六百一十九，笔钱二百，死卒钱二百卅，凡千卌九。(261·13B，261·27B)[①]

简2：制虏隧卒周贤：妻大女止氏年廿六，用谷二石一斗六升大；子使女损之年八，用谷一石六斗六升大；子使男并年七，用谷二石一斗六升大；凡用谷六石。(27·4)

此二简都是加法运算的实例，“凡”表示加后的结果，其算式相当于今之：

$619+200+230=1049$　（钱）；

$216\frac{2}{3}+166\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=600$（升）$=6$石.

有时也在凡、冣前加一圆点，其意思不变。汉简中“凡某某”、“冣某某”的句式很多，大都表示相加后的结果，如：

简3：凡入赋钱卅万八千八十。(285·22)

简4：凡百九十六顷八十亩。(509·23)

简5：·凡吏卒十七人，凡用盐三斗九升，用粟五十六石六斗六升大。(254·25)

简6：冣凡吏百石以下七十四人▨[②]

·冣凡七十人。(214·76A，B)

---

① 简后括号内的数字表示《居延汉简甲乙编》中的编号，每简用两个数字表示，中间用小圆点间隔。本章内不加说明者均同此。

② 本章内简牍释文中，用□表示不识的字，▨表示缺文且不能判别所缺字数。

简 7：*右方耦人藉凡卌九*。(88 (157))[1]

(2) “隧卒家属廪名籍”中的分数加法运算。“隧卒家属廪名籍”是记录配给隧卒家属粮食的帐册，居延汉简中：“☐☐年十一月家属廪名籍”(276·4A)、“☐省卒家属名籍”(58·16) 等都属于这类性质。“廪名籍”每项记载某一隧卒的家属的名字、性别、年龄、配粮等级和数量，并把该卒全体家属应得的配额小计起来，言明“凡用谷多少”。在数学上，这种名籍的每一项都需要进行加法运算，得出一家的配给量（只有一名家属时则不必加）。不仅如此，在帐册的结尾处还要对所有隧卒家属的配粮量进行统计，以确定发放粮食总量，这是对每户小计“凡用谷多少”的累计，用连加法。下面几简就是这方面的例子，其中简 9 显然是 19 项相加的结果：

简 8：*·右城北部卒家属名籍，凡用谷九十七石八斗*。(203·15)

简 9：*·冣凡十九人家属尽月见　用粟八十五石九斗七升少*。(203·37)

简 10：*·右省卒家属名籍　用谷卅石*。(133·8)

家属的配粮量按年龄大小分为至少 4 个不同的等级，称为大男（女）、使男（女）、未使男（女）。男比女相对高一级，大男配 3 石，大女和使男为 2 石 1 斗 6 升大，使女和未使男为 1 石 6 斗 6 升大，未使女为 1 石 1 斗 6 升大，后 3 个级别递差 5 斗。下面列举几例并写出算式来：

简 11：*☐卒李护宗　妻大女二包年廿九，用谷二石一斗六升大；子使男年七，用谷二石一斗六升大；·凡用谷四石三斗三升少*。(203·19)

---

① 金立．江陵凤凰山八号汉墓竹简试释．文物，1976 (6)：71

$(216\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=433\frac{1}{3}$（升））

简 12：制虏隧卒张孝　妻大女弟年卅四，用谷二石一斗六升大；子未使女解事年六，用谷一石一斗六升大；·凡用谷三石三斗三升少。（55·25）

$(216\frac{2}{3}+116\frac{2}{3}=333\frac{1}{3}$（升））

简 13：执胡隧卒富凤　妻大女君以年廿八，用谷二石一斗六升大；子使女始年七，用谷一石六斗六升大；子未使女寄年三，用谷一石一斗六升大。·凡用谷五石。（161·1）

$(216\frac{2}{3}+166\frac{2}{3}+116\frac{2}{3}=500$（升））

简 14：▨用谷三石　父大男相年六十，用谷三石；▨用谷三石；凡用谷九石。（203·27）

（3＋3＋3＝9（石））

简 15：▨妻大女君至年廿八，用谷二石一斗六升大；弟大女待年廿三，用谷二石一斗六升大；子使男相年十，用谷二石一斗六升大；（凡用谷六石五斗）。（203·32）

$(216\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}+216\frac{2}{3}=650$（升））

简 16：▨父大男贤年六十二，用谷三石；▨弟大男富年廿二，用谷三石；▨子使女阿年十三，用谷一石六斗六升大。凡用谷七石六斗六升大。（286·6）

$(300+300+166\frac{2}{3}=766\frac{2}{3}$（升））

以上各简在计算配粮量时，全部是复名数运算，我们在校算时都是以升为单位的，如把“二石一斗六升大”写作 $216\frac{2}{3}$ 升，等

等[1]。由于粮食不是按整斗整升配给的，而是有奇零“大半升”，即 $\frac{2}{3}$ 升，所以这里的运算总是和分数相关。还有另一类士卒家属廪名籍与上述名籍类似，居延汉简在命名这类简时，加上“在署”二字，如“☑月卒家属在署名籍”（191·10）（又185·13），这类名籍未记每个家属的具体用谷量，但有小计，有累计，也是加法运算的实例。举三简如下：

简17：第四隧卒虞护　妻大女胥年十五，弟使女自如年十二，子未使女真省年五，见署用谷四石八斗一升少。（194·20）

简18：第五隧卒徐谊　妻大女眇年卅五，子使女待年九，子未使男有年三，见署用谷五石三斗一升少。（203·3）

简19：第六隧卒甯盖邑　父大男偃年五十二，母大女请卿年卌九，妻大女二足年廿一，·见署用谷七石一斗八升大.（203·12）

（3）其他加法实例。汉简中收租、借贷的记录、边陲官吏的俸禄簿以及仓库保管实物帐目等都有加法运算的实例。江陵凤凰山十号汉墓中出土的木牍和竹简中，4号牍[2]是记租赋的帐目：

牍1：当利正月定算百一十五
　　正月算卌二给转费卩
　　正月算十四吏奉卩
　　正月算十三吏奉卩
　　正月算廾□（二）传徙卩
　　正月算□（廾）四（?）命贩（?）卩

① 在复名数运算中，关键是进位和退位，这是十进小数产生的基础。

② 黄盛璋．江陵凤凰山汉墓简牍及其在历史地理研究上的价值．文物．1974（6）：69

当利二月定筭丅(六十)

二月筭十四吏奉卩

二月筭十三吏奉卩

二月筭卅□（三）□缮（缮）兵卩

（下略）

其中“定筭”即是本月各筭的总和，一月和二月税帐分别给出下列两个加法式：

42＋14＋13＋22＋24＝115（筭）

14＋13＋33＝60（筭）

值得注意的是“当利二月定筭丅(六十)”，把60写作“丅”。这表明两个事实：一是数字的早期筹式表示。以往虽有西汉算筹的发现，但是在西汉文献中用筹算符号代替数字书写这是最早的例子之一。二是空位制的使用，“丅”实际上是数字6的筹式符号，这里把“丅”写在十位数上代表60，后面显然是空位。这正与中国一直以地位制书写数目完全一致。

凤凰山十号汉墓的竹简中有一组简共26枚，可能是地主贷给农民粮种的帐目，其书写格式一致，如下：

简20：户人野 能田四人 口八人 田十五亩十卩 贷一石五斗

其中“卩”为“结”，表示该帐目结束，“十”是画押符号。26简可列表如下：

户人	能田（人）	口（人）	田（亩）	贷（斗）
圣	1	1	8	8
杨	1	3	10	10
斁土	2	4	12	12
野	4	8	15	15
疕冶	2	2	18	18
疕	2	3	20	20

户人	能田（人）	口（人）	田（亩）	贷（斗）
□输	2	3	20	20
虜	2	4	20	20
佗	3	4	20	(20)
積	2	6	20	(20)
心	3	6	21	21
乞	2	6	23	23
□奴	4	7	23	23
青风	3	6	27	27
小奴	2	3	30	30
越人	3	6	30	30
未	3	4	30	(30)
定甶	4	4	30	30
骈	4	5	30	(30)
公士	4	6	32	(32)
村败	4	6	33	33
不章	4	7	37	37
其奴	3		40	40
胜	4	5	54	54
□奴	3	3	(14)	(14)
郑里禀簿：凡六十一石七斗（合计）				617

表中26简，记25户贷粮量，每户按田多少贷，每亩1斗。最后一简是总计："郑里廪簿 凡六十一石七斗"，据此可补全表内括号中数字。这个总计是把25户贷粮连加后的结果，核算结果是正确的。

下面是武威旱滩坡出土的一片木牍，为记出售药品的价格的帐单[①]：

牍2：牛膝半斤直五十 方风半斤百 小椒一升半五十 黄连半斤直百 河菆半斤直七十五 续断一斤百子威取 卑□半斤

① 甘肃省博物馆，武威县文化馆．武威汉代医简 摹木 释文 注释．北京：文物出版社，1975．19．原"凡直"后一字释为九，应为八。

直□（廿）五　慈石一斤半百卅　山朱臾二升半直五十　朱臾二升半廿五　席虫半升廿五　黄芩一斤直七十　□□二斤直廿七子威取　□□□取药凡直□百廿七

此牍记录的药帐单为我们提供了一个13项加法的例子。

50＋100＋50＋100＋75＋100＋25＋130＋50＋25＋25＋70＋27＝827

在居延简的经济帐目中也有一些加法实例：

简21：出钱千八百七十三　三墌隧长郑子良百，莫山候长百九十，廿六□□□四石九十一，俱起隧卒□□五百九十二毕，执胡隧卒□□五百……（乙附46）

（100＋190＋491＋592＋500＝1873）

简22：□钱三百七十五，肉十斤钱卅，·凡四百五……（173·8A，198·11A）

（375＋30＝405）

简23：▨钱十一万三千五百八十六[1]，其十一万四百三十四调钱，二百九十库所买直，二千八百六十二赵丹所买帛六匹直。（168·13）

（110 434＋290＋2 862＝113 586）

简24：	廿斤	廿斤	廿二斤半
十斤	廿一斤半	廿七斤半	廿五斤
廿九斤	廿六斤半	廿斤	廿三斤半
卅斤	廿九斤	廿六斤半	卅斤
廿一斤半	卅斤	廿五斤	十八斤
卅六斤	廿七斤	廿三斤	

·凡肉五百卌一斤，直二千一百六十四，脂六十三斤直三百七十八，脂肉并直二千五百卌二。凡并直三千二百一十二，脂肉

[1] “六”原释为“七”，据版图校算改正。

六百四斤。(286・19A)

头六十，肝五十，乳廿，肺六十，迹廿，舌廿，胃百□百钱，颈十钱，界十，宽卅，心卅斤，□十，二百，黄将十，肠益卌。卖雠直六百七十・凡四百五十。(286・19B)

此简正反两面记录了卖肉、脂及各种下水的数量和所卖钱数，帐的前半部分缺损，缺卖脂的具体账目。同时肉数也少，A面所记22项卖出共531.5斤，与其“凡肉五百卌一斤”的总计算少9.5斤。从肉、脂总数和值钱看，肉每斤四钱、脂每斤六钱。B面“心卅斤”中斤可能是钱字之误。此简A，B两面相联系，是多项连加的一个例子。肉541斤是经过至少23项相加而得到的，B面下水直670也是15项相加的结果：

60＋50＋20＋60＋20＋20＋100＋10＋10＋30＋30＋10＋200＋10＋40＝670

肉脂共数：541＋63＝604（斤）

肉脂共值钱：2 164＋378＝2 542（钱）

肉脂与下水总值钱：2 542＋670＝3 212（钱）

汉简中还有许多加法运算的实例。总之，在汉代的社会经济中含有很多加法运算的例子。

2. 减法运算

(1) 减法运算实例。与加法一样，汉简中也含有大量减法运算的实例。相仿地，财会中的术语“余”、“少”等字表示减法运算的结果。另外“定”字也常与减法相联系。例如：

简25：今余茭五千六百五十束。(3・15)

简26：今余粟米四石九斗。(敦38)[①]

简27：八月余米四石九斗，今八石八斗三升。(敦95)

---

① “敦38”表示敦煌汉简第38号，这里的编号按林梅村，李均明. 疏勒河流域出土汉简. 北京：文物出版社，1984. 本章内下同。

简 28：▨居负　定余谷卅六石。(182・48)

简 29：六月余谷二千六百五十一石四斗▨。(182・43)

简 30：今余粟六石六斗六升大。(413・7)

以上各简都与粮食出入簿有关，是这类简中表示结算的一简，以"余多少"的形式给出结算结果，表示按帐面算库内应存量。有时帐簿记录与实际结余略有不一致处，如简 27，帐面上应有 4 石 9 斗，而库内实有 8 石 8 斗 3 升。这并不是记帐的错误，而是支出时所付数量不足造成的过多库积。帐面结果是从入库总量中分别减去支出量得到的，在数学运算上即是连减法。有时在支出的同时又有收入，所以常常是加减混合运算的结果。

汉简从多方面反映出了减法的运算，下面分析几个例子：

简 31：▨马钱五千三百，已入千二百付隧卒丽，定少四千一百。(206・10)

这是还马钱的简，原应还 5 300，现还了 1 200，还欠 4 100，即 5 300－1 200＝4 100。

简 32：候史靳望正月奉需帛二匹直九百，其一匹顾发，定史一匹。(89・12)

简 33：凡吏十人，用帛廿二匹，其二匹顾发，定受廿匹。(137・21)

此二简是记发放俸禄的，以"定"表示实际发放结果，其算式如下：

2－1＝1（匹）　　22－2＝20（匹）

简 34：今余鍪二百五，其百五十破伤不可用，五十五完。(498・9)

此简属器物簿，鍪即鏉，系指烧盐用的敞口锅，共有 205 个，其中 150 个有损坏，不能再用，剩余完好者 55，即 205－150＝55。

简 35：度用铜四千八百廿三石一钧廿三斤，已入八百六十三石三钧十二两，少三千九百。(甲附 27)

此简下方残缺，据文意可补“五十九石二钧廿二斤四两”。按汉制1石为4钧，1钧为30斤，1斤16两。此简的复名数运算如下：

4 823石1钧23斤－863石3钧12两＝3 959石2钧22斤4两

简36：辛亥，卒三十七人，其二人病，三人养，定作三十二人。十四人作墼，九人画沙，九人累土。（306・21）

此简为劳作记录，前一部分为减法：

37－2－3＝32（人）。

（2）加减法混合运算。汉简中，加减法运算常是混合在一起的。一般的帐簿都是有收入也有支出的，在结算时把收入加在一起，再减去支出，然后定结余。类似的加减混合运算的实例很多。

简37：永光三年尽建始元年[①]三月会月别刺：・冣凡粟二千五百九十石七斗二升少，凡出千八百五十七石三斗一升，今余粟七百卅三石四斗一升少。校见粟得七百五十四石二斗。（142・32A，B）

此简是由永光三年到建始元年粮出入簿的最后核验结果，先把收入累计起来得总收入量：“冣凡粟二千五百九十石七斗二升少”，并把所有支出加起来，得支出总量，然后以总收入量减总支出量得结余。在数学上这是两组连加法与一个减法的混合运算，其减法为：

$$259\ 072\frac{1}{3}-185\ 731=73\ 341\frac{1}{3}\ （升）$$

但实际清核库存结余（75 420升）比帐面结余（$73\ 341\frac{1}{3}$升）多一些。

简38：十一月己卯掾疆所收五年余茭钱二千五十五，五年茭

① 永光三年为公元前41年，建始元年为公元前32年。

钱万四千五百廿八，·凡万六千五百八十三。出钱五千七百廿五□收掾车给官费，出钱三千八百六十六□居延责钱，出钱千县所□□，凡出万五百九十一。今余钱五千九百九十二。出钱四百五十二，一月壬辰付□□□□　出钱三百□□□付士吏□□□□□（209·2A）

这是记录草料收支的会计簿书。第一笔是从结余转入的，为收入。第二笔也是收入，两笔收入共计 16 583。紧接着是三项支出，共计 10 591。收入与支出相抵余 5 992。然后又是两笔开支。这是典型的加减混合运算实例，其算式为：

总收入：2 055＋14 528＝16 583

总支出：5 725＋3 866＋1 000＝10 591

结余：16 583－10 591＝5 992

或：（2 055＋14 528）－（5 725＋3 866＋1 000）

＝16 583－10 591

＝5 992

在江陵凤凰山汉简中也有加减混合运算的例子，我们来看一下 3 号牍[1]：

牍 3：平里户刍廿七石，田刍四石三斗七升，凡卅一石三斗七升。八斗为钱，六石当槁，定廿四石六斗九升当□

田槁二石二斗四升半，刍为槁十二石，凡十四石二斗八升半。

槁上户刍十三石，田刍一石六斗六升，凡十四石六斗六升，二斗为钱，一石当槁，定十三石四斗六升给当□

田槁八斗三升，刍为槁二石，凡二石八斗三升。

这是一份收刍、槁的帐单。刍和槁是指喂牲口的草料，这里以容量单位计算，可能是经过粉碎性加工后的饲料。简中记平里与槁上两户的刍、槁帐。每户按户和按亩收刍，只收田槁，不收

① 裘锡圭．湖北江陵凤凰山十号汉墓出土简牍考释．文物，1974（7）：50

户稿。刍稿可以交实物，也可以折钱交纳，刍还可以用稿代替。但刍比稿要贵一些，1 石刍相当于 2 石稿。帐中对两户应交刍稿实物做了结算：

（1）平里户刍：

2 700＋437－80－600

＝3 137－80－600

＝2 457（升）＝24 石 5 斗 7 升

平里户稿：

224.5＋1 200＝1 424.5（升）＝14 石 2 斗 4 升半

（2）稿上户刍：

1 300＋166－20－100

＝1 466－20－100

＝1 346（升）＝13 石 4 斗 6 升

稿上户稿：

83＋200＝283（升）＝2 石 8 斗 3 升

需要指出的是平里户的刍、稿数都与结算结果不同，刍应少 1 斗 2 升，稿应少 4 升。是计算之误，还是书写之误，不好断定。

江陵汉简中还有一枚大简是记田租的，按黄盛璋的释读如下[①]：

简 39：市阳租五十三石三斗六升半，其六石一斗当□糙物，〔其一石一升半当□〕，其七升半当□，其一石一斗二升当耗（？）其四石五斗二升当〔黄白□〕，凡十二石八斗三升，定卌〔石〕五斗三升半。

这也是加减运算的实例。共收租 53.365 石，以其他实物交纳的折 12.83 石，实际收谷物为 40.535 石，其算式如下：

---

① 黄盛璋．江陵凤凰山汉墓简牍及其在历史地理研究上的价值．文物，1974（6）

53.365－（6.100＋1.015＋0.075＋1.120＋4.520）
＝53.365－12.830＝40.535（石）

3. 乘法运算

（1）乘法运算实例。汉简中有不少乘法实例，这些例子大量出现于俸禄记录、财产统计、劳作记录以及各种商业计算中。下面先举几个有关俸禄的例子：

简40：居延甲渠候长张忠未得正月尽三月积三月奉用钱三千六百，已赋毕。（35·5）

简41：候一人未得七月尽九月积三月奉用钱九千。（127·28）

简42：出赋钱八万一百，给佐史八十九人十月奉。（161·5）

简43：元年十二月尽二年正月积二月奉钱千四百，十二月丙辰自取。（95·10）

简44：广昌候史敦煌富贵里孙毋忧未得二月尽五月积四月奉用钱二千四百。（敦219）

以上各简都给出官吏的秩、食俸时限和数量，如简40，官为甲渠候长，人数为1人，时限为3月，俸用钱3 600，这是乘法运算，其算式可列如下：

1 200钱×1×3＝3 600钱

在上举各例中都未说明每月俸禄多少，即上式中的1 200未给出。这样，在表面上看来似乎在乘法运算中缺少被乘数。事实上并非如此。各官吏的俸钱多少是由朝廷明文规定的，为人所共知，所以在帐簿中只需标明是哪一级官就知道其月俸为多少了[1]。因此，被乘数实际上已给出，如简41候每月俸3 000钱，简42佐史每月俸900钱等。总之，前举各简中的乘法算式如下：

3 000×1×3＝9 000　　（简41）

---

[1] 关于汉代官吏的月俸钱，见陈梦家．汉简所见奉例．汉简缀术．135～147

900×89×1=80 100 （简 42）

700×1×2=1 400 （简 43）

600×1×4=2 400 （简 44）

这些算式全部为连乘法。汉简中还有许多这样的乘法运算实例，有些与“直”、“积”等术语连用，例如：

简 45：黍米二斗，直钱卅。（36·7）

简 46：买白素一丈，直二百五十，凡九百七十九。（214·26）

简 47： 缥一匹直八百，白练二匹直千四百，练一匹直千，□素丈六尺直三百六十八，帛二丈五尺直五百，马君卒。（284·36）

简 48：·右庶士、士吏、候长十三人，禄用帛十八匹二尺少半寸。（210·27）

简 49：受六月余河内廿两帛卅六匹二丈二尺二寸少半寸，直万三千五十八钱。（509·8）

简 50：帛千九十匹二尺五寸大半寸，直钱卅五万四千二百。（509·15）

简 51：出广汉八稯布十九匹八寸大半寸，直四千三百廿，给吏秩百一人元凤三年正月尽六月积六月☐。（90·56，303·30）

简 52：出河内廿两帛八匹一丈三尺四寸大半寸，直二千九百七十八，给佐史一人元凤三年正月尽九月积八月少半日奉。（303·5）

简 45～52 都是一定数量的某物“直”多少钱的形式。“直”即今“值”。这是把实物折合成货币单位的例子，即以货币计量实物。以货币计价、实物折算[①] 是西汉官府会计通过货币数量进行综合核算的特点之一。这种把实物折合成货币单位的方法即是乘法的应用：以实物单价乘实物数量得实物的总价，即“直”多少。与前面提到的关于俸禄的例子一样，这里各简也未给出物品的单价，

① 郭道扬. 中国会计史稿（上册）. 北京：中国财政经济出版社，1982. 218

这是由当时财会方法所决定的。简 45，46，47 中的乘法算式为：

15×2=30（简 45）

250×1=250（简 46）

800×1=800，700×2=1 400，1 000×1=1 000，

23×16=368，20×25=500　（简 47）

简 47～52 是由布匹折合成钱作为俸禄的，计算较为精细，连少半寸也算在内，但其计算似乎有误，校算不易。

简 40～52 中的乘法算例是从简本身的内容推算的。下面再看一些乘法实例，其乘数、被乘数、积都已明确给出：

简 53：戍卒魏郡贝丘珂里杨通：贳卖八稯布八匹，匹直二百卅，并直千八百卌，……

（居延汉简甲编 1 656）

（230×8=1 840）

简 54：国安粜粟四千石，请告入县官贵市贾石六钱，得利二万四千，……（20・8）

（6×4 000=24 000）

简 55：斗食吏三人，一月奉用钱二千七百，一岁奉用钱三万二千四百（4・11）

（（900×3=2 700）　2 700×12=32 400）

简 56：▨九十□三千卅□　一月九千，一岁十万八千，三岁凡卅二万四千□▨。（113・8）

（（9 000×12）×3=108 000×3=324 000）

简 57：终古隧卒东郡邑高平里古胜字涛翁，贳卖九稯曲布三匹，匹三百卅三，凡直千，……（282.5）

（此简“匹三百卅三”后脱一“少”字，校算式为：$333\frac{1}{3}\times 3=1\ 000$。）

（2）加、减法与乘法混合运算。汉简中加法、减法与乘法的

混合运算实例屡有出现。下面分别举几个不同的例子。首先是劳作记录中的算式。在敦煌汉简中有一类简系专门记录边陲士卒劳作情况的簿册，既有加法与乘法的运算，也有除法算例，下面是与乘法有关者：

简58：丁未：骑士十人，其一人候，其一人养，其八人作墼。人作百五十，凡墼千二百。（敦664）

简59：☑□养，九人作墼。人作百五十，凡墼千三百五十□□。（敦665）

简60：已酉：骑士十人，其一人候，其一人为养，八人作墼。人作百五十墼，凡墼千二百。（敦666）

简61：丁已：骑士十人，一人养，九人作墼。人作百五（十）墼；凡墼千三百五十。（敦667）

简62：九人作墼，人作百五十墼，凡墼千三百五十……（敦671）

简63：□□，骑士十人，其一人为养，九人作墼，人作百五十，凡墼千三百五十。（敦673）

简64：癸酉：骑士十人，其一人养，九人负墼，人致二百卅。（敦662）

以上各简是作墼的记录。墼是一种长方形土坯，为建筑边防烽台、房舍的主要材料，制作墼是戍卒的任务之一。这些简表明墼是由所谓“骑士”完成的，而且10个人为一组，每组有一、二人从事后勤、了望等事务，其余人作墼，每人每日定额为150。其算式如下：

$(10-1-1)\times150=8\times150=1\ 200$　　（简58，60）

$(10-1)\times150=9\times150=1\ 350$　　（简59，61～63）

$(10-1)\times230=9\times230=2\ 070$　　（简64）

其中简61脱一“十”字，简64是搬运墼的。

其次我们看一下税赋收支帐目中的乘法运算，如江陵5号牍，

共计 17 项，其形式如[1]：

“市阳二月百一十二算，算卅五钱，三千九百廿正，偃付西乡偃佐缠吏奉卩，受正□二百卌八。”（35×112＝3 920）

今据 5 号牍原文列出下表：

乡里与时间	算	每算收钱	合　计	校　算
市阳二月	112	35	3920	35×112＝3920
		10	1120	10×112＝1120
		8	896	8×112＝896
市阳三月	109	9	981	9×109＝981
		26	2834	26×109＝2834
		8	872	8×109＝872
市阳四月	109	26	2834	26×109＝2834
		8	872	8×109＝872
		9	981	9×109＝981
		9	981	9×109＝981
	本月小计		5668	2834＋872＋981＋981＝5668
市阳五月	109	9	981	9×109＝981
		26	2834	26×109＝2834
		8	872	8×109＝872
	本月小计		4687	981＋2834＋872＝4687
市阳六月	120	36	4320	36×120＝4320
郑里二月	72	35	2520	35×72＝2520
		8	576	8×72＝576
		10	720	10×72＝720

此木牍所记为市阳、郑里两地税钱的收支情况。税钱按“算”收取，每月分几次，每月每算收多少钱不等，如二月 53 钱，

[1] 黄盛璋．江陵凤凰山汉墓简牍及其在历史地理研究上的价值．文物，1974，(6)：68

三月 43 钱，四月 52 钱，五月 43 钱，六月 36 钱等。四月和五月还有小计。从算法上看，是乘法与加法的混合，其运算全部正确。

另外，一些商业性帐单中也有加、乘混合运算的例子。如江陵汉简中有 12 简，可能是完整的一册，内容前后相联，记录出售货物多少和价目。现将原文和校算列如下：

原简文字	核算
（六）月十六日付司马伯枲一絜，卌二；	42
六月廿二日付□□□：□：二百五十一，凡五百二；	2×251＝502
六月廿五日付五翁伯□□二百　□直百卌；	140
八月十三日付干（王）兄与司马伯分二□：卅八，直七十六；	2×38＝76
九月一日□□付□□□六合：五十四，直三百廿四；	6×54＝324
九月四日付五翁伯枲一卌、卅三合：五十四，直百六十四；	3×54＝162
九月九日付五翁伯笥二合：五十，直百；枲一，卅，凡百卅；	2×50＋30＝100＋30＝130
九月〔十日〕付〔五翁〕伯笥二合：五十四，直百八；	2×54＝108

原　简　文　字	核　算
九月十五日付司〔马伯〕笥二合：五十四，直百八；枲四絜：七，直廿〔八〕，凡百卅六；	2×54＋4×7＝108＋28＝136
九月〔□□□□□二□九〕十四，凡百〔八十八〕；	2×94＝188
十月十日付枲五絜：四，凡廿。	5×4＝20
六月十六日□□决□至十月十日，凡三月二十三日所出，凡千八百廿八。	合计：1 828

这些简中有贷物的单价、数量和总计，并有累计，从校算结果看，仅九月四日一简把百六十二误作百六十四，此系笔误，其他全部正确。其中"："为重文号。

最后，我们看一看新居简中一册爰书所涉及到的数学计算。这册题为《建武三年十二月候粟君所责寇恩事》的爰书共 36 简。其内容大意为[1]：甲渠候粟君雇寇恩到觻得替他卖鱼，约定鱼 5000 条，卖价 40 万行钱，以牛 1 头和谷 27 石为雇工费。寇恩到觻得后卖鱼所得不足 40 万，于是卖掉牛凑足 32 万钱，还给粟君之妻业。寇恩又以其他实物和他儿子的劳工费相抵，不仅还清所欠的 8 万，而且还余款 24 600，或谷 6 石 1 斗 5 升。但是粟君非但不还寇恩余款，反告寇恩卖了他的牛不还，并欠他鱼钱 8 石（相当于谷 20 石）。为查明此事，都乡啬夫负责二次验问了被告，并据口供写成了爰书，说明粟君所告不实。爰书中具体计算了寇恩的还

[1] 释文见甘肃居延考古队简册整理小组．建武三年候粟君所责寇恩事释文．文物，1978（1）：30，31

款：

恩到觻得卖鱼尽，钱少。因卖黑牛，并以钱卅二万付粟君妻业，少八万。恩以大车半梱轴一，直万钱，羊韦一枚为橐，直三千；大笥一合，直千；一石去卢一，直六百；𫃗索二枚，直千；皆置业车上。与业俱来还，到第三置，恩籴大麦二石付业，直六千；又到北部，为业买肉十斤，直谷一石，石三千；凡并为钱二万四千六百，皆在粟君所。……又恩子男钦以去年十二月廿日为粟君捕鱼，尽今正月、闰月、二月，积作三月十日，不得贾直。时市庸贾大男日二斗，为谷廿石。恩居觻得付业钱时，市谷决石四千。以钦作贾谷十三石八斗五升直觻得钱五万五千四（百），凡为钱八万，用偿所负钱毕，恩当得钦作贾余谷六石一斗五升付。

这种算法可分为四部分：

（1）欠鱼钱：-40 万$+32$ 万$=-8$ 万

（2）还业实物折合钱：

$10\,000+3\,000+1\,000+600+1\,000+6\,000+3\,000=24\,600$（钱）

（3）寇恩子钦劳工费还钱：

$3\times30+10=100$（天）

2 斗$\times100=200$ 斗$=20$ 石

4000 钱$\times13.85=55\,400$ 钱

（4）决算：

$24\,600+55\,400=80\,000$

$-80\,000+80\,000=0$（还清欠款）

又：20 石-13.85 石$=6.15$ 石$=6$ 石 1 斗 5 升

或者写成综合式如下：

$$(-400\,000+320\,000)+[(10\,000+3\,000+1\,000+600+1\,000+6\,000+3\,000)+4\,000\times13.85]=-80\,000+(24\,600+55\,400)=-80\,000+80\,000=0$$

4. 除法运算

（1）除法运算实例。汉简中“率”字表示一份所占的数量的意思，但这要由除法求得。这将在下面的例子中见到：

简 65：出钱四千三百卅五，籴得粟五十一石：[1] 八十五。(276・15)

简 66：丁未六人作墼四百廿，率人七十，初作。(敦 193)

简 67：壬戌四人作墼二百六十，率人六十五。一人病，与此四千四百六十五。(敦 195)

简 68：二人积墼五千五百六十，率人积二千七百八十墼。(敦 89)

简 69：六人画沙中天田六里，率人三百步。(敦 176)

简 70：卅二人画天田卅二里，率人日画三步，凡四□。(敦 136)

简 71：定作卅人伐茭千五百束，率人五十束，与此三千八百束。(168・21)

简 72：廿三日戊申卒三人，伐蒲廿四束大二事，率人伐八束，与此三百五十一束。(161・11)

简 73：三人负粟步昌，人二反致六橐，反复百八十八里百廿步，率人行六十二里二百卌步。(敦 155)

简 74：庚辰四人作墼二百八十，率人七十□□。(敦 84)

简 65～74 都是除法运算的实例。其中简 65 是籴粮的记录，其他全为劳作记录，有制墼、画沙田、伐茭、运粮等各种日常事务。简 70 中“率人日画三步”虽然脱掉一“百”字，这可与简 69 对照而知。敦煌简中有“若干人画天田率人若干里若干步”(敦 46)，说明这类计算平均工作量的作法在当时很普遍，除法在实际中的运用很多。以上 10 简中反映出的除法算式如下：

---

[1] “：”是重书符号，这里“：”是石，即“籴得粟五十一石，石八十五。”

4335÷51=85（简 65） 420÷6=70（简 66）

260÷4=65（简 67） 5560÷2=2780（简 68）

6÷6=1（里）=300 步（简 69）

32÷32=1（里）=300 步（简 70）

1500÷30=50（简 71） 24÷3=8（简 72）

188 里 120 步÷3=62 里 240 步（简 73）

280÷4=70（简 74）

以上各简中，除简 65 外，都用“率”表示除得的一份。据此，并与上述各简相比较，可知下面各简虽有残损，但其除法意义十分明显：

简 75：▨二月积二百六十一匹，率马日食一斗八▨。(19・30)

简 76：以食候马积千二百三匹、匹一斗二升。(491・1)

简 77：▨马八匹，十月食，积二百卌匹，匹一斗二升。(65・2)

简 78：□□□□□家属六人官驼二匹食，率匹二斗。(罗布淖尔汉简，41)[1]

简 79：▨日两车一反载七百束，车三百□▨。(261・7)

如果把缺少部分用方括号内表示，则上述五简的完整算式依次如下：

〔4 698〕÷261=18（升）

〔14 436〕÷1 203=12（升）

〔2 880〕÷（8×30）=2 880÷240=12（升）

〔4〕÷2=2（斗）

700÷〔2〕=350（束）

（2）算术四则混合运算

乘除混合运算的实例，主要见于汉简的粮食出入簿中。在这类簿书中，每笔支出都注明系多少人自某日始至某日终共多少日

[1] 林梅村，李均明．疏勒河流域出土汉简．北京：文物出版社，1984．100

食用，平均每日每人多少。如

简 80：出糜大石一石七斗四升，始元二年七月庚子朔，以食吏一人尽戊辰廿九日，积廿九人，人六升。(88・26)

今把这类简择几例列表如下：

简　号	出糜量（升）	人数（人）	时间（日）	折合一日人数（人）	日食量（升）	校　算
88.26	174	1	29	29	6	174÷（1×29）＝174÷29＝6
148.48	174	1	29	29	6	174÷（1×29）＝174÷29＝6
275.2	180	3	10	30	6	180÷（3×10）＝180÷30＝6
273.10	900	5	30	150	6	900÷（5×30）＝900÷150＝6
273.13	174	1	29	29	6	174÷（1×29）＝174÷29＝6
275.12	360	2	30	60	6	360÷（2×30）＝360÷60＝6
275.16	720	4	30	120	6	720÷（4×30）＝720÷120＝6
275.18	348	2	29	58	6	348÷（2×29）＝348÷58＝6
275.21	870	5	29	145	6	870÷（5×29）＝870÷145＝6
534.1	180	1	30	30	6	180÷（1×30）＝180÷30＝6

最后，我们来看几个加减与除法混合的例子：

简 81：□杜狂受钱六百。出钱百一十五籴麹五斗，斗廿三；出钱二百廿籴粱粟二石，石百一十；出钱六买燔石十分；出钱二百一十籴黍粟二石，石百五；出钱廿五籴豉一斗；出钱百一十籴大麦一石，石百一十；凡出六百八十六。(214・4)

此简是买物的帐单，既说明了用多少钱买多少物，又有物品单价和出钱总数。可以用算式表示如下：

220÷2＝110　115÷5＝23

210÷2＝105　110÷1＝110

以及 220＋210＋110＋115＋6＋25＝686

简 82：凡积九十人，其十人养，定作十六人，得绳千六百丈。率人廿丈，与此三千二百丈。(143・3，217・24)

简 83：八月甲辰卒廿九人，□□，其一人作长，三人卒养。□□□四人，定作廿五人。二人伐木，六人积茭，十四人运茭四千六十，率人二百九十☑　二人缀络具，□□□功。(30・19A)

简 84：十一月丁已卒廿四人．其一人作长，三人养，一人病，二人积苇。右解除七人，定作十七人，伐苇五百□，卒人伐卅，与此五千五百廿束。(133・21)

简 82～84 都是劳作记录。其中简 82 "定作十六人" 是 "定作八十人" 之误。简 83 最后的 "□□□功" 应为 "一人□功"，而 "□□□四人" 可能是 "右解除四人"（比较简 84）。又简 84 中一个不识的字应是 "十"，即 "伐苇五百十"。这些判断都可从校算作出。此 3 简反映出算式可分别列如下：

1 600 丈÷（90－10）＝1 600÷80＝20（丈）；

29－（1＋3）＝29－4＝25（人），

25＝2＋6＋14＋2＋1（人）；

4 060÷14＝290；

510÷［24－（1＋3＋1＋2）］＝510÷（24－7）＝510÷17＝30。

第三节　简牍中的其他数学史料

本节将进一步介绍秦汉简牍中的分数、比例、负数、面积以及其他一些数学史料。

1. 分数算法

分数在中国起源于何时，有待于进一步详考。不过，它的出

现确实是很早的，甚至被认为可以上溯到文字出现的初期[1]。战国时期分数的应用已很多，有不少例子。[2] 简牍中的分数概念已相当明确，睡虎地秦简及敦煌、居延、银雀山等汉简中都有一些实用分数的例子。

先秦典籍中对特殊的分数$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$等都有特殊的名称，分别称为“少半”、“半”、“大（或太）半”。如《墨子》卷十五：“参食，食参升少半；四食，食二升半；五食，食一升大半。”这里“参升少半”、“二升半”、“一升大半”分别表示$3\frac{1}{3}$，$2\frac{1}{2}$，$1\frac{2}{3}$升。简牍中仍然延用了这些特殊分数的名称，有时直接用“大”、“少”表示$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{3}$，这样的例子很多。在计量谷物、布匹及发放俸禄时，常用大（半）、少（半）、半等词来表示这些分数。简牍中对这几个特殊分数也有更一般性的说法，如：

简 1：卒岁，十牛以上而三分一死；……（秦・厩苑律）[3]

简 2：及隶臣妾有亡公器、畜生者，以其日月减其衣、食，毋过三分取一。（秦・金布律）

除了$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$等分数外，简中还有一般的分数，如：

简 3：御史、卒人使者，食粺米半斗，酱驷（四）分升一，……（传食律）

简 4：上造以下到官佐、史毋（无）爵者，及卜史司御寺府，粝（粝）米一斗，有采（菜）羹，盐廿二分升二。（秦・传食律）

---

① 李继闵．中国古代的分数理论．《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社，1982．190

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．24、25

③ 云梦秦简整理小组．云梦秦简释文（二）．文物，1976（7）：2．本节所引秦简均同此，第1～11，括号内为律名。

简 5：参不正，六分升一以上，升不正，廿分升一以上，……赀各一盾。（秦·效律）

简 6：县料而不备，其见数五分一以上，直（值）其贾（价），其赀、谇如数者然。十分一以到不盈五分一，直（值）过二百廿钱以到千一百钱，谇官啬夫；过千一百钱以到二千二百钱，赀官啬夫一盾；过二千二百钱以上，赀官啬夫一甲。百分一以到不盈十分一，……（秦·效律）

简 7：度禾、刍、槀而不备，十分一以下，令复其故数，过十分（一）以上，先索以禀人，而以律论其不备。（秦·效律）

这儿简中包括了$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{22}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{20}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$等。这说明至迟在战国晚期，我国已经有了很多简单分数。不仅如此，分数的大量出现和使用促进了分数概念的发展[①]，其意义已不再是“度量单位的细分”，已经从“几分升几”、“几分寸几”等度量单位中抽象出了一般的概念。简 1，2，6，7 中的“三分一”、“三分取一”、“五分一”、“十分一”、“百分一”等等都没有具体单位，表示原数的某些部分。这种意义下的分数概念已经与今完全一致了。

在分数的运算方面，除了前一节中已经列举的“隊卒家属廩名籍”中的加法算式外，还有其他一些算法，如武威汉简本《礼仪》中有关丧服绖带的算法就涉及到了分数的运算，其原文如下[②]：

“苴绖大鬲，左本在下，去五分一以为带；资衰之绖，斩衰之带也，去五分一以为带；大功之绖，资衰之绖[③]也，去五分一以

① 李继闵．中国古代的分数理论．《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社，1982．194

② 甘肃省博物馆，中国科学院考古研究所．武威汉简．北京：文物出版社，1964．91

③ “绖”系“带”之误，见《武威汉简》第 156 页。

为带；小功之绖，大功之带也，去五分一以为带；缌麻之绖，小功之带也，去五分一以为带。”

这里规定了“丧服”中各不同级别间的绖、带长度及其关系。在计算上利用分数的减法和乘法运算，经过公式 $l=l'\left(1-\frac{1}{5}\right)$ 反复迭代可求得各绖、带的长度。即如设斩衰之绖长为 l，则有：

服　名	绖　长	带　长
斩衰	l	$l_1=l\left(1-\frac{1}{5}\right)$
资衰	l_1	$l_2=l_1\left(1-\frac{1}{5}\right)=l\left(1-\frac{1}{5}\right)^2$
大功	l_2	$l_3=l_2\left(1-\frac{1}{5}\right)=l\left(1-\frac{1}{5}\right)^3$
小功	l_3	$l_4=l_3\left(1-\frac{1}{5}\right)=l\left(1-\frac{1}{5}\right)^4$
缌麻	l_4	$l_5=l_4\left(1-\frac{1}{5}\right)=l\left(1-\frac{1}{5}\right)^5$

l，l_1，l_2，l_3，l_4，l_5 是以 $\frac{4}{5}$ 为公比的等比数列。北周甄鸾在《五经算术》中计算了丧服绖带的长度，他以 $l=9$ 寸，得[①]：

$$l_1=7\frac{1}{5}\text{寸},\ l_2=5\frac{19}{25}\text{寸},\ l_3=4\frac{76}{125}\text{寸},\ l_4=3\frac{429}{625}\text{寸}。$$

银雀山汉简也有类似的计算：

简 8：尾五分去三有（又）分之五咸步去□……（银 1639）[②]

简 9：见尾三分去二□□□□ ☒（银 1808）

① 钱宝琮校点．算经十书．北京：中华书局，1963．450，451

② 指银雀山汉简第 1639 号，编号按吴九龙．银雀山汉简释文．北京：文物出版社，1985．下同

简 10：隋行万□三分去二□□□……（银 1826）

简 11：……尾三分加……（银 3483）

简 12：……□五分去三……（银 3880）

这里的“五分去三”、“三分去二”及“三分加……”等显然具有分数运算的意义，如设总体为 1，则它们应为：$1-\frac{3}{5}$，$1-\frac{2}{3}$及 $1+\frac{1}{3}$或 $1+\frac{2}{3}$。

比较两个分数的大小，并说明较大者比较小者大多少的方法在《九章算术》中称为“课分术”。简 5，6，7 就是比较大小的实例。简 5 中，“参”是一种容器，容量为$\frac{1}{3}$斗。这简说明如果参不符合标准，其误差达到$\frac{1}{6}$升，或者升的误差超过$\frac{1}{20}$升，即误差达到 5%，则要受到“赀一盾”的处罚。简 6 中“县料”如果缺少，在不同的数量级别按不同的误差界限进行处罚，其误差界限分为（1）多于$\frac{1}{5}$，（2）少于$\frac{1}{5}$而多于$\frac{1}{10}$，（3）多于$\frac{1}{100}$而不足$\frac{1}{10}$。简 7 以$\frac{1}{10}$为界，分两种情况进行处罚。判断误差的大小是建立在对分数之间进行比较大小的基础上的。只有通过比较大小才能确定其误差在哪个限度之内。同时，在同一限度之内还要确定误差在哪个数量级别内，如简 6 当误差在$\frac{1}{10}\sim\frac{1}{5}$之间时还必须确定缺少的数量是在 220 钱到 1 100 钱之间还是在 1 100 钱到 2 200 钱之间，等等。上述计算过程与“课分术”非常接近，区别仅在于课分术在比较分数大小之后再确定两分数间的差，而这里是确定差的界限。显然，这是课分术出现的基础之一，由此也可看出《九章算术》的社会背景。

2. 比和比例

比和比例是人类很早便接触到的数学概念，它们在日常生活

中经常出现。如草药方中各种药物成分的多少，物物交换中各种不同物品间的比率等等都是比和比例概念产生的基础。简牍中有不少比和比例的记载：

（1）粮食的加工比例。《秦律·仓律》中有：

简13：〔粟〕一石六斗大半斗，舂之为粝（粝）米一石，粝（粝）米一石为糳米九斗，糳米九斗为毇米八半。………麦十斗为䴹三斗。

这里规定了各种粮食的加工和对换比例为：

（1）粟：粝米：糳米：毇米$=16\frac{2}{3}:10:9:8$

$=50:30:27:24$

（2）麦：䴹$=10:3$

《九章算术·粟米》卷首的“粟米之法”规定：

（3）粟：粝：粺：糳$=50:30:27:24$

（4）麦：小䴹$=45:13.5=10:3$

（1）与（3）在比值上均为50：30：27：24，但粮食种类不同。粟与糳之比，按秦律则为50比27，按九章则为50比24。《说文解字·粝部》：“粝，米一斛舂为九斗曰糳，”又“毇，米一斛舂为八斗也。”比值与（1）相同。说明米的名称是在变化的。不过，就数学而言，重要的是这种比例关系的存在。既有粮食间的加工比率，那么就一定要进行相应的计算，而这种计算正是《九章算术·粟米》中的今有术下的例子。秦律以法律形式规定了粮食间的比率关系，而《九章算术》以“粟米之法”作为“今有术”各题的基本比率关系，这正说明比例的产生不是偶然的，它是社会经济发展的产物。

（2）大、小石间的比例。汉代容量单位有斛、石、斗、升等，其进位关系为：1石＝10斗＝100升，1斛＝10斗。而且同时有两套容量不同的容器，分别称为大石、小石等。大、小石之称起源

于粟米的比率，即 1 石粟舂后得米 1（小）石[①]，所以：

大石容量：小石容量＝10：6 或 5：3

居延简中有不少大小石间换算的例子：

简 14：入糜小石十四石五斗，为大石八石七斗，……(278·9)

简 15：凡出谷小石十五石，为大石九石。(148·15)

简 16：入糜小石十二石，为大石七石二斗。(148·41)

简 17：▨为大石十石七斗五升二分。(308·41)

简 18：为大石□三石八斗八升。(33·21)

大小石之间的换算显然是通过今有术实现的。例如简 17 中的小石数可按下式求得：

$$\text{小石数}=\frac{\text{大石数}\times 5}{3}=\frac{1075.2\times 5}{3}=1792=17\text{ 石 }9\text{ 斗 }2\text{ 升}$$

(3) 医药配方。在武威汉代医简中的 30 多个完整的各科方剂中，每剂都有药物的配方比例，其重量单位有升、斤、尺、两、分、颗、束、枚、方寸匕、五分匕、一刀圭和三指撮等。这些配方体现了比和比例的应用。例如[②]：

牍 1：樊石二分半，禹余量四分，蘖米三分，厚朴三分，牡麹三分，黄芩七分。凡六物皆冶合和，丸以白密，丸大如吾实，旦吞七丸、馆吞九丸。

牍 2：治妇人膏药方：□三升，付子卅枚，弓大郧十分，当归十分，甘草七分，菜草二束，白茝四分。凡七物以盼膊高舍之。

(4) 工人程及其他比例。秦简中关于工人程的律文中涉及到了比，如：

---

① 陈梦家．关于大小石、斛．汉简缀述．考古学专刊甲种第十五号，北京：中华书局，1980．149

② 甘肃省博物馆，武威县文化馆．武威汉代医简　摹本　释文　注释．北京：文物出版社，1975．14，17

简 19：冗隶妾二人当工一人，更隶妾四人当工〔一〕人，小隶臣妾可使者五人当工一人。（秦律・工人程）。

简 20：隶妾及女子用箴（针）为缗绣它物，女子一人当男子一人。（秦律・工人程）

简 21：隶臣、下吏、城旦与工从事者，冬作为□程，赋之三日而当夏二日。（秦律・工人程）

这是对计算工作量的规定。这些规定都以比的形式出现的，其内容即是：

（1）劳动效率比为：

冗隶妾：更隶妾：小隶臣妾：工人

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:1$。

（2）做针线活的女子与男子的工作效率比为 1：1。

（3）冬天劳动日：折合夏天劳动日为 3：2。

居延简中也有类似的例子：

简 22：北边絜令第四候长史日迹将军吏劳二日皆当三日。（10・28）

即　实际劳动日：应算劳动日为 2：3。

上孙家寨汉简中也有关于比的论述。另外敦煌简中还给出了相应的计算。

简 23：敦德步广尉曲平望塞有秩候长敦德亅亭间田东武里五士王参，秩庶士。新始建国地皇上戊元年十月乙未迹尽二年九月晦，积三百六十日，除月小五日，定三百亅五十五，以令二日当三日，增百桼十桼日半日为五月二十桼日半日。（敦 317）

即　增后日数：355＝3：2

故　增日＝3×355/2－355＝177.5（日）

　　　　＝5 月 27.5 日。

3. 负数的例子

《九章算术》方程章第一次给出了正、负数的运算法则。负数概念的出现则比《九章算术》的记载要早一些，从负数的概念发展到负数的运算法则的确立是需要一段实践和进一步提高认识的。“负”的本来意思是亏欠、亏负之意。“负数”出现的初期正是与计算结果出现亏欠或者不足，以及因某种过失而受到处罚等实际生活中的事例有关，常和“少”、“负”等词相联系。汉简中的有关例子反映了负数的这种早期形态。

简 24：水门隧卒苏当时 负百六十九▨（306・1）

简 25：临之隧长王君房 负季子七百六十，六百七人少六十（220・16）

简 26：▨方相除负卌五。其▨（407・11）

简 27：▨负二千二百卌五算，▨□所负卅六算，奇十三算（6・12）

简 28：第四 决 决 第四决 不 不 相除以负百廿四算（226・23）

简 29：迎奉食钱未持来，自责之不得，劾之。贤良责弘、胜之。弘负千三百，胜之负三千五（百）。（312・1）

简 30：弘、胜之皆谢。贤曰：会坐文事致论用自给请今具偿。责弘未得，责胜之已得：粟二石，直三百九十；糜三石，直三百六十；它钱三百五十；凡已得千一百。少二千四百。今▨。（26・9A）

简 31：吞远候史季赦之：负不侵卒解万年剑一，直六百五十；负止北卒赵忠袭裘一，直三百八十；凡千卅□。（258・7）

简 32：万岁候长充：受官钱它课四千负四算，毋自言堂煌者第一得七算，相除得三算。第一。（206・4）

简 33：弦加巨负三算 ▨辟一箭道不端敝负五算。（265・1）

简 34：甲渠候鄣：大黄九十石弩一右深强一分负一算，八石

具弩一右弭去负一算，六石具弩一空上蜚负一算，六石具弩一衣不足负一算，坞上望火头三不见所望负三算，坞上望火头二不见所望负二算，□扣弦一脱负二算。凡负十一算。(52 • 17，82 • 15)

以上 11 简都与“负”有关。负的本来意思就是欠别人东西，简 24，25 正是表示这个意思的。其他各简都是经过计算的：简 26，27，28 中负表示不足减或抵消不了等，其中的“相除”就是相减或正负相抵，因不足减或抵消不了，故称“负”多少。简 27 虽有残缺，但后一句“☐□所负卅六，奇十三算”可能是一个正负相加的例子，即用正算（49）去抵消所负的 36 算，剩余 13 算。简 29，30 所述是同一件事。这两简的上方标号不同[①]，不过都出土于破城子。从照片版图来看二简木质与笔体都一致，说明它们是由一个人同时所写。劳干把它们分为“书檄”和“刑讼”两类[②]，这显然是没有把它们联系起来。这两简大意为：贤为向弘、胜之讨还欠款而告发了他们。弘欠 1 300，胜之欠 3 500（据简 30，简 29 最后三千五后应是百字）。已向胜之收得粟、糜及他物共 1 100，胜之还负 2 400，这是正、负相加的例子：

$$-3\ 500+(390+360+350)=-3\ 500+1\ 100=-2\ 400。$$

简 31，32 的意思十分明确，其算式如下：

$$-650+(-380)=-1\ 030。$$

$$-4+7=3。$$

简 33，34 是关于军事方面的，系因军事设备不符合标准或因对烽火观察失误等原因而在考核中受罚的记录，单位为算。简 33 中两项不合格，一项负三算，另一项负五算，简 34 则因各种过失共负十一算，即：

---

① 上方标号相同的简出土于同一地点，见《居延汉简甲乙编》下册，附录一，第 297 页。

② 中国科学院考古研究所．居延汉简甲编．北京：科学出版社，1959．112，128

(−1) + (−1) + (−1) + (−1) + (−3) + (−2) + (−2) = −11 (算)。

总之，汉简中不仅有负数的概念，而且包括了负数加减运算的例子。同时，负数的出现和发展有着深刻的社会背景，负数概念就是从“少”和“负”等实际应用事例中抽象出来的。汉简为我们提供了这方面的早期例证。

4. 面积和体积

简牍中提供了不少与面积、体积有关的实例，特别是面积方面的例子较多。先举一个体积的例子：

简35：墼：广八寸，厚六寸，长尺八寸。一枚用土八斗，水二斗二升。(187·6，187·25)

此简虽没有给出墼的具体体积是多少，但是有用土和用水量，说明是计算过它的体积的[①]。

关于边陲烽燧设置中重要的障、坞、亭等的建筑记录中有些与体积有关。不过，这些军事设施的记录中关于面积的内容更为丰富。有关的简如：

简36：一人草涂□内屋，上广丈三尺五寸，长三丈，积四百五尺。(敦67)

简37：四人马夫涂□□，长四丈九尺，广六尺，积二百九十四尺。(敦229)

简38：二人第人一□□□草涂内屋，广三尺五寸，积四百五尺，率人二百二尺五寸。(敦131)

简39：☐高四丈二尺，广丈六尺，积六百七十二尺，率人二百廿三(四)尺□□。(敦234)

简40：三人马夫涂□上内地，广七尺，长十丈四，积七百廿八尺，率人二百卌[二]尺□□[大半]。(敦222)

---

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．43

简41：一人马夫涂□内地广一丈。(敦56)

简42：☐尺，长三丈，积三百三尺。(敦65)

简43：一人马矢涂户前地二百七十尺。(敦209)

简44：二人削除亭东西，广丈四尺，高五丈二尺。(敦51)

这些简都与面积有关，简36～40中长、宽和积都十分明确，其面积计算公式与今相同。简41～44虽有残缺，但也可断定为与面积有关的简。汉简中的面积单位没有“平方”的字样。不过汉简中明确区分了做为长度的尺和作为面积的尺，例如以上简中未把405尺、294尺等表示面积的尺进位为丈，说明已经注意到长度单位和面积单位不同。

汉简中另一类有关面积的记载是关于地亩面积和田制问题的。关于地亩的如：

简45：凡百九十六顷八十亩。(居509·23)

简46：☐二百七顷六十七亩。(居509·24)

简47：守望亭北平第九十三町，广三步，长七步，积廿一步。(303·17)

银雀山汉简及睡虎地秦简等都有一些有关地亩和田制的论述，提供了一些有关面积计算的信息。简牍中反映了如下一些事实：首先，银雀山汉简《田法》[1]强调立邑建城，度地居民的思想。即要注意土地、人口、城邑建置的结构关系，使它们保持一定的比例。这种“量地制邑”使城、地、人三相称的做法也被称为“算地”。其次，按户数多少划分不同级别的行政区域，如里、州、乡等，所谓“五十家为里，十里而为州，十州而为乡。”同时还要按劳动力多少授田，即如：“州、乡以地次受（授）田于野，百人为区，千人为或（域）。”第三，规定了田的产量，如“岁收：中

① 银雀山汉墓竹简整理小组．银雀山竹书《守法》、《守令》等十三篇．文物，1985(4)：35～36

田小亩为廿斗，中岁也，上田亩廿七斗，下田亩十三斗，大上与大下相复以为衛（率）”并按田多少收交租纳税，不能完成者要受到处罚。第四，山林川泽也按一定比例进行折合，以确定税赋。《田法》中给出了各种折算比例，如：“山有木，无大材，然而斤斧得入焉，九而当一。”第五，秦律中田律规定，下级必须经常不断地向上级汇报田地的情况，不论是遇到自然灾害还是得到雨水，抑或耕作情况都要即时上报地亩顷数。这些事实说明：在战国时期土地丈量和面积计算在政治、经济发展中都占有重要地位。上自立邑建城、行政区划，下至交租纳税都离不开对土地的测量和计算。可见，关于面积和地积的计算在当时已具相当大的规模和相当高的水平。

在地积方面有大亩和小亩的区别，上面关于岁收的规定是按小亩计算的。关于大亩的例子如：“一人而田大亩廿[四者王，一人而]田十九亩者朝（霸），[一人而田十]四亩者存，一人而田九亩者亡。”这里没有说明大小亩的具体亩积是多少，当时的地亩积相当不统一，在银雀山简《孙子兵法·吴问》中提到不同亩积的地亩制：“范、中行是（氏）制田，以八十步为婉（畹），以百六十步为畛（亩）”。“韩魏制田，以百步为婉（畹），以二百步为畛（亩）。”“赵是（氏）制田，以百廿步为婉（畹），以二百卌步为畛（亩）。”亩积从160平方步到240平方步，相差很多。

在战国田制中，强调合理的分划与布局。对几何图形按一定形式进行分划和重新布局是现代数学的重要内容之一。战国田制中包含了这种思想。1979年2月出土于四川青川郝家坪的公元前309年的秦田律木牍[①] 对此做了良好的说明：

牍3：(上略）田，广一步，袤八，则为畛，亩二畛，一百

---

① 四川省博物馆，青川县文化馆．青川县出土秦更修田律木牍——四川青川县战国墓发掘简报．文物．1982（1）：1～13

（陌）道。百亩为顷，一千（阡）道。（下略）

这是对一顷即百亩田的分划、布局。现按田宜超等的解释如下[1]：按秦制，田 240 平方步，每亩田分为两块，每块为一畹，畹端为畛，故亩二畛。畛是田间的小道，面积为 8×1 平方步，畛间

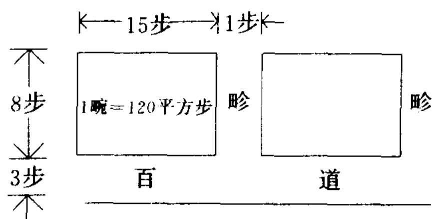


图 3·3·1　秦亩图

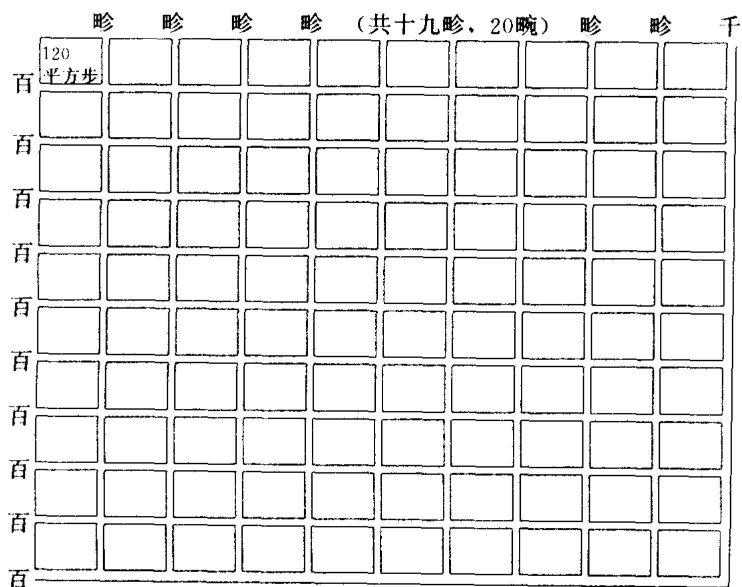


图 3·3·2　千陌图

① 田宜超，刘钊．秦田律考释．考古，1983（6）：545～548

相距15步。亩的两侧又有百（陌）道，宽为3步，与畛垂直（图3·3·1）。而千（阡）道在顷端，与陌垂直（图3·3·2）。

总之，我国的面积计算具有悠久的历史。简牍资料表明战国时期的面积计算不只是个别人才掌握的，而是具有相当的普遍性。古“六艺”中“九数”以方田为始，《九章算术》把“方田”——即地亩面积的计算作为第一章，正反映了面积计算的社会性和它的古老性。

5. 其他数学史料

除了前面介绍的一些史料外，简牍中还有一些零星材料值得注意，分别介绍如下：

（1）在数字的写法上，简牍中常把二十、三十和四十写作廿（或卄）、卅（或丗）、卌（或卌）。而把七一般写作“+”，有时也写成“桼”，主要是为了区别“+”与“十”。五则经常写作×，这是延袭战国时的数字符号。值得注意的是仍存在合文的写法，如把七十写成“𠦃”。另外，汉简中有一些筹式符号，如以“⊤”表示六，把四十写作“≡十”。居延简中有：

简48：驿马驿一匹　⊥⊥⊥⊥⊥⊥⊥⊥（10·18）

简49：—＝　（148·29）

简50：— —＝—　（148·39）

简51：＝—　（148·49）

简52：— — —＝　（148·50）

这些简中的符号都是筹算的数字符号，这可能是习算者作为练习而书写的。

（2）“九九术”与数学著作。九九术在战国时代就已有之，汉简中屡有九九表出现，如：

简53：九：八十一　八九七十二　七九六十三　六九五十四　☐　（36·5）

简54：九：八十一　八九七十二　七九六十三　六九五十四

四九卅六　三九廿七　二九十八　八：六十四　七八五十六　六八卌八　五八卌　四八卅二　三八廿四　（75・19）

简 55：九九八十一　八九七十二　七九六十三

八八六十四　七八五十六　六八卌八　五八卌

五七卅五　四七廿八　三七廿一　六五卅　五五廿五　四五廿　三五十五

二三而六　二二而四　□□□□

太凡千一百一十（三）　（敦 755）

这 3 份都是九九残表[①]，可能是为了背诵记忆而写的，其中第三份还有合计，“大凡千一百一十”（三为衍文），这表明九九表中不含一一如一等九句。另外，新居延简中也有九九术[②]。

简牍中专门数学著作的发现，著名的有张家山汉简中的《算数书》。除此之外，尚有其他一些有关数学著作的内容，如根据发掘简报报道有：新居延汉简中《算术书》的残简[③]，敦煌马圈湾汉简“有九九算术书”残简[④]。已发表的银雀山汉简中也有一些简被认为是“算书”的佚文[⑤]，这些佚文除简 8～12 外，还有：

简 56：二方积于反见尾……（银 2289）

简 57：……陈于反俗积□……（银 2871）

---

① 残缺部分见李俨．中国古代数学史料．北京：中国科学图书仪器公司，1954．16，17

② 甘肃居延考古队．居延汉代遗址的发掘和新出土的简册文物．文物．1978（1）：10

③ 甘肃居延考古队．居延汉代遗址的发掘和新出土的简册文物．文物，1978（1）：10

④ 甘肃博物馆，敦煌县文化馆．敦煌马圈湾汉代烽燧遗址发掘简报．文物，1981（10）：7

⑤ 吴九龙．银雀山汉简释文．分类“其・五”为“〔算书〕”．北京：文物出版社．243

简 58：……有陈于反见……（银 3140）

简 59：山陈□见尾去……（银 3261）

由于过分残损，这些简的数学内容已无法复原了，它们的真正涵义是什么也很难弄清了。

敦煌汉简中有些简也可能是数学著作的佚文，它们残损很严重，如：

简 60：☑九十八分□□□□□□□□□

☑九十三并中小将□九□□□□　（敦 89）

简 61：☑□步勾得四　方当　第一九　第二合十一　第三合十六　第四合☑　（敦 935）

简 62：□□和至六正方数数□□之即转□至第三节　（敦 7）

居延汉简中的一简则无疑是数学著作的残文，其行文语气与《九章算术》完全一样，但不是这部数学著作中的题目。这简为：

简 63：☑五斗二升廿七分升廿六。术曰：并上下☑　（居 126.5）

上述有关数学著作的资料虽然很少，但是从此我们可窥见秦汉数学的繁荣景象。所有这些都表明，汉代已有不少数学著作问世，而且比较普及，数学著作已不是罕见的，不仅在中原地区而且在边塞也有习算者。数学著作的大量出现表明这一时期数学知识的积聚十分迅速，正在蕴育着新的突破和飞跃。

6. 从简牍看秦、汉时期的经济数学

如前所述，简牍为我们提供了大量的数学史料。不仅如此，简牍中的数学知识都是通过经济、法律等方面的内容反映出来的。数学知识应用于经济领域并与经济相结合，必然会促进经济数学的发展。

秦、汉时期，定量的数学方法已经渗透到了经济、法律等多个领域。经济的发展使得越来越多的问题需要用定量的方法加以

说明和解决。不仅在经济上而且在政治法律上数学定量的方法也明显地显示出了其重要性。竹简秦律中的法律条文大多都与数字有关，反映了对数量关系的重视和对数学方法的需求。这主要是因为定量方法可使法律更加严密，避免法律条文的歧义性。秦律中很多经济条文都是采用数学定量方式说明的。如：仓律规定了生产用种子的定量："种：稻、麻亩用二斗大半斗，禾、麦亩一斗，黍、荅亩大半斗，叔（菽）亩半斗。利田畴，其有不尽此数者，可殹（也）。"还规定了各种粗细粮之间的对换比率（简13）。金布律规定了低级官吏的待遇，以人数多少配备车牛："都官之佐史冗者，十人，养一人；十五人，车牛一两（辆），见牛者一人；不盈十人者，各与其官长共养、车牛。"还以数量形式规定了犯人衣服用料标准和衣服费用："大褐一，用枲十八斤，直（值）六十钱；中褐一，用枲十四斤，直（值）卌六钱；小褐一，用枲十一斤，直（值）卅六钱。""禀衣者，隶臣、府隶之毋（无）妻者及城旦，冬入百一十钱，夏五十五钱，其小者冬七十七钱，夏卌四钱；春冬入五十五钱，夏卌四钱，其小者冬卌四钱，夏卅三钱；隶臣妾之老及小不能自衣者，如春衣。"等等。

在处罚方面也是定量性的。秦律中凡是与经济有关的处罚都是按钱折算的，根据所犯错误造成的经济损失的数量定罚（如简6，7）。秦代计量物资常以布匹作为单位，但也要折合成钱，以便作定量的分析和处理。秦律规定："钱十一当一布，其出入钱以当金布，如律"。（金布律）一匹布折十一钱，秦律中凡以布匹计量时都折成钱，如220，1 100，2 200，660，55，77钱等都是11的倍数，表示一定数量的布匹。

总之，定量的方法已经成为秦法律、经济中不可缺少的工具。

从经济上加强控制是巩固封建政治的一个重要手段，秦、汉以法律形式制定了各种计量制度，要求度、量、衡的各个方面都必须准确无误，规定了各种计量的精度和违反标准的处罚条例。

如："计较相缪殹（也），自二百廿钱以下，谇官啬夫；过二百廿钱以到二千二百钱，赀一盾；过二千二百钱以上，赀一甲。人户、马牛一，赀一盾；自二以上，赀一甲。"（效律）"数而赢不备，直百一十钱以到二百廿钱，谇官啬夫；过二百廿钱以到千一百钱，赀官啬夫一盾；过千一百钱以到二千二百钱，赀官啬夫一甲；过二千二百钱以上，赀官啬夫二甲。"（效律）要求财会人员在会计簿书的记载和会计计算上都必须准确，从各个方面对财会人员的数学水平提出严格的要求。

严格的计财制度，对于促进经济数学的发展起了一定作用。为了能够严格照章办事，不出差错，人们就必须加强数学训练，提高数学水平。同时数学修养较高的人受社会和官府的重视。居延汉简的材料表明，"能书会计"的人受到特殊注意，为他们建立专门的档案材料，例如："☐候官穷虏隧长簪褭单，立中功五，劳三月，能书会计，治官民颇知律令文。年卅岁，长七尺五寸。应令居延中宿里，家去官七十五里。属居延部。"（89・24）此简记录名为单的人的官秩、担任边防工作的时间，以及年龄、身高、乡里、家离官府远近等，具有人事档案的性质。其中特别说明"能书会计，治官民颇知律令文。"这类的简还有很多，所记项目完全相同。可见掌握了一定数学知识、能够熟练承担财会工作的人员在当时是受到重视的。

在秦、汉会计方法中有不少经济数学方面的内容，其中以统计方法、统计数表和统计结果的数字处理最为重要。进行数学统计在秦、汉时期是十分广泛的，以秦律为例，要求下级向上级和朝廷上报的项目相当繁杂，涉及面广，形成了所谓的上计制度。例如：

简 64：雨为澍，及诱（秀）粟，辄以书言澍稼诱（秀）粟及豤（垦）田暘毋（无）稼者顷数。稼已生后而雨，亦辄言雨少多，所利顷数；早及暴风雨、水潦、螽（螽）蚰群它物伤稼者。亦辄

言其顷数。近县令轻足行其书，远县令邮行之，尽八月□□之。（秦律·田律）

简 65：入禾稼、刍、槁，辄为廥籍，上内史。（秦律·仓律）

简 66：稻□禾熟，计稻后年。已获上数，别粲、穤秥稻、别粲、穤之襄（穰），岁异积之，勿增积，以给客，到十月牒书数，上内史。（秦律·仓律）

简 67：县上食者籍及它费大仓，与计偕，都官以计时雠食者籍。（秦律·仓律）

简 68：都官岁上出器求补者数，上会九月内史。（内史杂）

按律规定，凡遇到自然灾害或有利于农业的雨水都要上报受害或得益的田地亩数。每年要由地方向朝廷主管部门上报各种各样的数表，如粮食产量、廪粮名籍、各种帐册等等。为此，财会和经济管理人员必须建立一套统计方法，以确保各报表准确及时上报。这样的统计范围广，项目多，规模大。可见当时必定已形成了一套严密的统计方法。

统计报表是根据统计资料制定的数字表格，这样的表在简牍中相当多，如居延简中的各种定期文书，即是根据各种记录和报告写成的帐簿[1]，这些文书即是上报表，涉及各个方面，如：吏卒名籍、卒家属廪名籍、劳作簿、日迹簿、器物簿、财物出入簿、钱出入籍等。又如第二节简 20 类中的 26 简就是一份统计表，包括 4 个项目和合计。

对统计数表的数字处理是秦、汉经济数学的一项重要内容，国家依据对报表的分析来对地方官吏进行考核和监督，而主管部门则依据数表分析向皇帝提供咨询。对数表的数字处理是一项繁重的数学工作，掌管上计的人员必须具有相当的数学水平才行。在

[1] （日）永田英正．居延简集成之一——破城子出土的定期文书（一）．简牍研究译丛．第一辑．北京：中国社会科学出版社，1983．57

现代类似的工作是由计算机承担的。秦、汉时期的数字处理工作已经具有相当大的规模，而且水平也很高，曾有数学家担任过这类工作的领导，数学家张苍就是一例。“张苍乃自秦时为柱下史，明习天下图书计籍，苍又善用算律历，故令苍以列候居相府，领主郡国计者。”[①] 因他在秦时就担任过审计、处理上报表的工作，而且精通数学和财务，故汉朝命他“领主郡国计者”，担任主管上计部门的官吏，从事数据处理工作。

总之，当时不仅建立了统计方法，而且有一套对数据进行处理的方法。伴随着政治、经济的发展，经济数学的发展也很快，而且成果也比较突出。

---

① 《史记》卷96“张丞相列传”，北京：中华书局，2675～2676

第四章　算筹与筹算法

本章将对中国古代的算筹和筹算集中地进行一些探讨。因有关史料散见于各书，故本章所涉及的年代将不限于某一时期，这样在叙述上要方便一些。

第一节　算筹

1. 算筹的起源

从现存文献的记载来看，至晚从春秋末期起，一直到元末，这一历史时期中国数学的主要计算工具是算筹。实际上早在商代可能已有，如本编第二章第四节所述，而本节要讲的是实物和文献记载。《论语》子路篇载："子曰：噫，斗筲之人，何足算也。"其中已提到"算"字。按许慎《说文解字》竹部，"算，数也。从竹，从具，读若筭。"又谓，"筭，长六寸，计历数者。从竹，从弄，言常弄乃不误也。"可见，"算"字的本义是用竹棍儿进行计算。这个竹棍儿也就是我们要说的算筹。1973 年湖南长沙马王堆三号汉墓出土的甲、乙两种《老子》帛书都提到了算筹。甲本载，"善数者不以梼箖"。乙本载，"善数者不用梼筞"[①]。梼，即筹。箖，筞即策。与善数者相对而言，通常在计算时要使用筹策，亦即算筹。这说明，春秋末期，算筹已经是常用的计算工具。此外，元末陶宗仪《辍耕录》(1366) 中提到"苟用算筹亦可"[②]，同时还提到

---

① 马王堆汉墓帛书《老子》，北京：文物出版社，1976．26，58

② [元] 陶宗仪．辍耕录．卷二十．《丛书集成初编》本。

"稍久曰算盘珠，言拨之则动"[①]，则反映了珠算盘广泛使用之前算筹与珠算盘并用的情形。从以上的记载来看，算筹作为计算工具，在中国历史上至少使用了1800年以上。运用这种计算工具，产生出中国古代数学的独特的算法以及许多惊人的成果。

如上所述，春秋时期，算筹已是常用的计算工具。因而，它的产生与成熟又当在其前若干年。我们认为，它的产生与成熟当与记事记数符号的发展水平相适应。西安半坡出土的陶器上可见到数目字：×（五）、∧（六）、𠂇（七）、)(（八）、|（十）、||（二十）。在陕西姜寨出土的陶器上还有：一（一）、|||（三十）。在甲骨文、金文中的数目字就更多了。1978年，河南登封出土的战国早期陶器上刻有记数符号ヨ，ᚎ，这些数目字已与用筹表示的数目字形体相同。

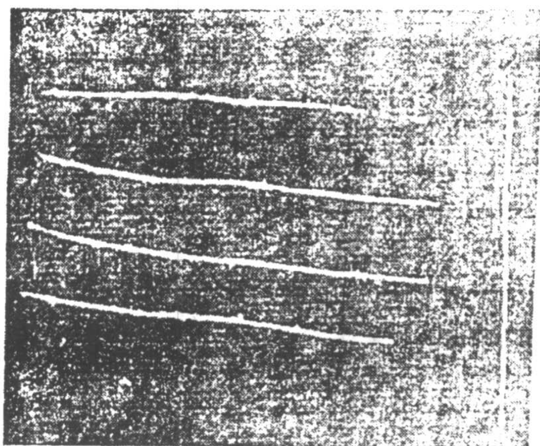
值得注意的是，中国古代八卦的符号与记数符号颇有相似之处。近人的研究指出，八卦可能是居住在陈（今河南境内）的太皞族使用的记事符号，它出自太皞族或其酋长太皞（传说与伏牺为同一人）。这种符号用一卦代表同一属性的若干事物，如☰（乾）表示天、父、玉、金，☷（坤）表示地、母、布、釜等等。后来，黄帝族逐渐定居在中部地区，继承了这些符号[②]。八卦及其哲理的演变至西周末期形成定本《周易》[③]。它的发展经历了漫长的历史。按照黄帝距夏禹三十世来推测，则太皞至西周末约3000年。如果记数符号与八卦的产生、发展大体上是同步的，则记数符号也当成熟于西周末期。因而，与这种符号相适应的算筹大体上也当成熟于西周。

---

① ［元］陶宗仪．辍耕录．卷二十．《丛书集成初编》本，卷二十九。

② 范文澜．中国通史（一）．89～90

③ 关于《周易》成书年代诸说不一，此据西周末年说。见：宋祚胤．周易新论．长沙：湖南教育出版社，1982



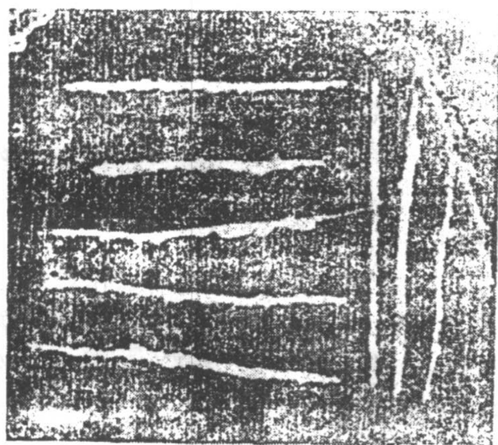


图 3·4·1　登封出土陶器上的筹算数目字
（《中国科学技术史稿》上册）

目前所知最早的算筹实物是1954年长沙左家公山出土的战国晚期算筹[1]。而文献的记载则早得多。《逸周书》的记载对了解算筹的产生有所帮助。该书载：

卑辞而不听，□财而无枝，计战而□足，近告而无顾，……是定亡矣。[2]

其中所说的"枝"很可能是早期的算筹。考上下文，"□财而无枝"一语，其义当为"理财而无枝"[3]。《说文解字》："枝，木别生条也。从木"。故"枝"即是树枝。扬雄《方言》"私、策"条下郭璞注："杪小也。"又注："木细枝谓之杪"。又注："燕之北鄙，朝鲜洌水之间谓之策"[4]。可见，策即是细树枝。因而《逸周书》所谓枝即是后来所说的策，亦即算筹当无可怀疑。古汉字中还有一个"祘"字。《说文解字》："祘，明视以筭之。从二示。《逸周书》曰，士分民之祘，均分以祘之也。读若筭"[5]。这条史料至少可以说明，西周时期随着生产的发展以及社会财富的分配，需要较前更为复杂的计算技术。从而也促进了算筹这种计算工具趋于成熟则是符合规律的事情。这与"理财而无枝"所反映的情形一致。由此推测，算筹成熟于西周大概与史实不会悬殊太大。

2. 算筹的名称、材质及形制

就算筹的功用而言，除用于计算外尚可兼作它用，如占卜；而它物，如箭、箸均可代替算筹。况且其应用广泛而持久。故有关算筹的史料广泛地见于各种文献。[6] 以下仅取与数学的关系较大者以及近年考古发现的有关资料列于名称、材质等项之下。

---

① 湖南省文管会. 长沙左家公山的战国木椁墓. 文物参考资料. 1954 (12)

② 《逸周书》卷十.《丛书集成初编》本。一般认为该书为汉代以前的著作。

③ 《慎子》有"投策以分马"的记载。

④ 钱铎. 方言笺疏（卷二）. 光绪庚寅红蝠山房刊本. 1890

⑤ 《丛书集成初编》本《逸周书》无此语。

⑥ 李俨. 筹算制度考. 中算史论丛.（四）. 北京：科学出版社，1955

关于名称。

枝：

《逸周书》卷十，“□财而无枝”。

筹策：

《老子》帛书甲本，“善数者不以梼箖”。

乙本，“善数者不用梼笙”。

《盐铁论》贫富篇，“俸禄赏赐一二筹策之积”[1]。

算，筭：

《九章算术》开方术，“借一算，步之”。

《汉书》律历志，“其算法用竹”[2]。

《说文解字》竹部，“筭长六寸”。

《九章算术》刘徽注，方程第四、五、六及十五题，“互易其算”；第十八题，“凡九章大事，按法皆不尽一百算也”；方程又术，“凡用一百二十四算也”。

《孙子算经》卷中第十九、二十题，“次借一算为下法”；卷下第三十五题，“各列一算于左方”。

《夏侯阳算经》卷上明乘除法条，“纵算相似，横算相当”；开平方除注、开立方除注，“借一算为下法”。

《五经算术》卷上“论语千乘之国法”注，“借一算为下法”；卷下，“黄钟术曰，置一算”。

《隋书》律历志，“其算用竹”。

筹，策：

《淮南子》诠言训：“临货分财，必探筹而定分”。高诱注，“探筹，捉筹也”。

梅乘，七发，“孟子持筹而算之，万不失一”。

---

① 恒宽.《盐铁论》贫富篇. 诸子集成.（七）. 北京：中华书局，1954

② 本章所用诸史皆据中华书局标点本。

《后汉书》马融传，“隶首策乱，陈子筹昏”。

《九章算术》商功章第十五题刘徽注，“谓以情推，不用筹算”。

《隋书》律历志，“正策三廉”，“负策四廉”。

《旧唐书》卢杞传，“吏秉笔执筹，人人第舍而计之”。

《梦溪笔谈》卷十八，“运筹如飞，人眼不能逐”。

《四元玉鉴》祖颐序，“寄之剔之，余筹易位”。

算子：

《张邱建算经》刘孝孙草，卷中第十九、二十、二十一题，卷下第三十、三十二题，“借一算子于下”。

《新五代史》汉臣传王章传，“此辈与一把算子未知颠倒”。

算筹：

《辍耕录》卷二十，“苟用算筹亦可”。

从以上例子来看，算筹的名称不少于六种。就古代数学著作而言，比较多地是采用“算，筭”。这可能与《九章算术》、《汉志》的影响有关。

关于材质。

木：

《逸周书》卷十，“枝”。

帛书《老子》甲、乙本，“梼”。

“枝”，“梼”，从木。

竹：

1954 年长沙左家公山出土战国算筹，竹质。

1983 年初到 1984 年底在湖北江陵张家山 M247 号西汉初期的墓葬中也出现了竹质算筹[①]。

《汉书》律历志，“其算法用竹”。

---

① 张家山汉墓竹简整理小组．江陵张家山汉简概述．文物，1985（1）：9～15

《数术记遗》，“今之常算者也，以竹为之”。

《隋书》律历志，“其算用竹”。

骨：

1971 年陕西千阳出土西汉算筹，骨质[①]。

1980 年河北石家庄出土东汉算筹，骨质[②]。

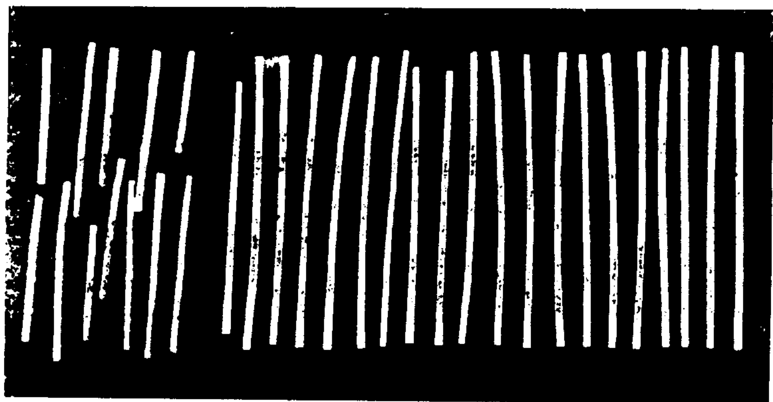


图 3·4·2　陕西千阳出土西汉骨筹（采自《考古》1976 年 2 期）

牙：

《资治通鉴》卷八十二，“王戎为三公，……园田遍天下，每自执牙筹，昼夜会计，常差不足”[③]。

《日用算法》陈几先跋，“其用心岂为运牙筹，计金谷而已哉？”[④]

陕西旬阳汉墓中出土了象牙筹[⑤]。

---

① 宝鸡市博物馆等. 千阳县西汉墓出土算筹. 考古，1976（2）

② 李胜伍等. 石家庄东汉墓及其出土的算筹. 考古，1982.（3）

③ 司马光. 资治通鉴. 卷八十二，晋纪四，惠帝元康七年（297）. 古籍出版社排印本。

④ 李俨. 宋杨辉算书考. 中算史论丛，第二集. 中国科学院出版，1954

⑤ 此条资料系李培业先生提供。

铁：

《清异录》卷上，“铸铁为算子”，“唤算子作长生铁”[①]。

以上史料说明，早期使用过木筹，汉代使用过骨筹，晋至宋使用过象牙筹、铁筹。大约使用最广泛的是《汉志》、《隋志》所载的竹筹。

关于形制。

战国之前的算筹，其形制目前尚不甚清楚。推测起来，原始的算筹无论长度还是形状都无严格规定。如《逸周书》说用细树枝计算。《离骚》：“索藑茅以筳篿兮，命灵氛为余占之”。注云，“筳，小折竹也”。又云，“筳，竹筭也”[②]。此处所说的“筳”是占卜的筹。由此推测，原始的算筹大抵随所取材质的天然形态，而后世渐有定制。

《礼记》载，“箭筹八十，长尺有握”。疏云，“谓以箭为筹，云长尺，复云有握，则握在一尺之外，则此筹尺四寸矣”。又有“筭长尺二寸”的记载[③]。

1954 年长沙出土战国晚期竹筹长短一致，每根长 12 厘米，共 40 根。

《盐铁论》贫富篇，“运之六寸，转之息耗，取之贵贱之间耳”。所云“六寸”即筹长 6 寸。

1971 年陕西千阳西汉墓出土骨筹最长者 13.80 厘米，最短者 12.60 厘米，多数为 13.50 厘米。圆径，粗者 0.40 厘米，细者 0.20 厘米，一般为 0.30 厘米[④]。

《汉书》律历志，“径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，

---

① ［宋］陶谷．清异录．（卷上）．“不动尊”条。康熙戊子（1708）刊本。

② 曲园居士．评点王注楚辞（卷一）．中华图书馆石印本。

③ 《礼记正义》卷五十八。阮元校刻《十三经注疏》本。

④ 据文字报导，完好者 21 根，断残不可接者 10 根，一组共 31 根。但据同一期《考古》所载实物照片共 32 根。

为一握”。即长约13.8厘米，圆径约0.23厘米[1]。苏林曰，“六觚，六角也。度角至角，其度一寸，面容一分，算九枚，相因之数有十。正面之数有九。其表六九五十四，算中积凡得二百七十一枚”。其排列如图3·4·3。

1980年石家庄早期东汉墓出土骨筹，完整者7.8至8.9厘米。方形截面，方约0.4厘米。共两把，一把13根，一把17根。均匀、齐正、可见光泽[2]。

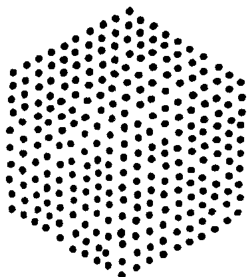


图3·4·3
《汉书·律历志》
六觚图示

《说文解字》，“筭，长六寸”。约13.8厘米。

《数术记遗》甄鸾注，“长四寸，以放四时，方三分，以象三才”。约长11.8厘米，方约0.89厘米。

《隋书》律历志，“广二分，长三寸。正策三廉，积二百一十六枚，成六觚，乾之策也。负策四廉，积一百四十四枚，成方，坤之策也。”约长8.55厘米，广0.59厘米。

《中馈录》，“切肉长三寸，各如算子样”[3]。

从以上史料可见，一、算筹有一个由圆变方的演变趋势，东汉时期或可为一界限。大抵因方筹较圆筹不易滚动，可减少布算的错误。二、由文献记载来看，算筹逐渐由长变短，但出土实物与此有出入。或因日常应用者未必尽合于经典的规定。三、出土的实物算筹，长短有不尽相同者，未必因作工不精。若使摆出的算式齐整一致，算筹应当长短不一。

3. 算筹的附件

---

① 据吴承洛《中国度量衡史》换算。

② 据报导，现保存完整者九根，残一根。

③ [清] 梅文鼎. 古算器考.《梅氏丛书集要》本。

算袋为算筹的附件之一。在湖北江陵张家山M247西汉初的墓葬里出土的遣册上记有“算橐一”，“橐”音高，是古代装弓箭、甲等的袋子，“算橐”显然是装算筹的袋子，即算袋。但实物已不存在了。陕西千阳西汉墓出土的算筹即装在男骨腰胯部的一个丝囊里，这是迄今所见最早的算袋实物。根据这些资料可知，在西汉时期已经普遍使用算袋盛装算筹，佩带在身边。《旧唐书》高宗本纪载，上元元年（674）八月戊戌敕：“一品以下文官，并带手巾，算袋，刀子，砺石，武官欲带亦听之”。又睿宗纪载，景云二年（711）四月壬寅，“又令内外官，依上元元年九品以上文武官咸带手巾，算袋”。至玄宗时，此制有所改变。玄宗纪载，开元二年（714）七月丙午敕“京官所带胯巾，算袋，每朝参日着，外官衙日着，余日停”。“算袋”亦见于宋代文献。《孙公谈圃》载宋人作诗偶得佳句即“奋笔书一小纸，内算袋中”[①]。

宋代文献中还载有“算子筒”的名称。《西湖老人繁胜录》提到南宋杭州的行市上有算子筒出售[②]。它可能是放置算子的用具。

文献上未见关于筹算板的确切记载，这或许因其使用并不广泛。从记载来看，算筹可以随身携带，计算也往往因事而随时随地进行。故在没有筹算板的情形下，计算未必不可实施。《旧唐书》卢杞传说，“吏秉笔执筹，入人第舍而计之”。平民第舍中未必备有筹算板。《张邱建算经》百鸡问题之后有谢察微所拟术草，其中有“置钱一百在地”的记载。《测圆海镜》中也有“置甲南行六百步在地”之类的记载。其中所谓“地”，当为置筹之所。按《说文》，“地”字本义即是大地，地面。可见，“置某某在地”义为置筹若干于地面上。当然，这并非否定筹算板存在。清代对于

① ［宋］刘延世. 孙公谈圃（卷下）. 涵芬楼影印《学津讨源》本。

② 《永乐大典》卷七千六百三. 中华书局影印本。其中所引《西湖老人繁胜录》言及庆元间事，当为宁宗时情形。

筹算作过考释的劳乃宣说，"盖古者，席地而坐，布算于地，……后世施于几案"[①]，非为无据之谈。北宋历家卫朴"每算历，布算满按"[②] 其中"按"可有"案"通假。《说文解字》谓，"案，几属"。故"按"可为几案之类，或为布算专用之具。南宋黄伯思所著《燕几图》中，录三种长方桌排列图形[③]。其中"布算"桌长7尺、宽5尺2寸5分，"小布算"桌长、宽各5尺2寸5分。具高2尺8寸。顾名思义，或为布算之桌，但仍不切实用。

第二节　筹算

1. 算筹的记数法

以算筹为工具进行的数学运算，称为筹算。它与算筹有同样悠久的历史。

运算的基本问题是，在同一个运算过程中，必须遵守统一的进位制。其次，以固定的形式可以表示出任意给定的数目字。筹算完全具备这样两个条件。包括筹算在内的中国古代数学始终遵循十进位值制，这一点已无需更加说明[④]。关于用算筹所表示的数目字的形式，在早期的文献中缺少记载。从刻划记事记数符号及后来的记载来看，从一至四这4个数目字，分别可用1根、2根、3根及4根算筹表示出来。除上节所示陶文的例证外，汉简中也不乏这样的例子，如"始建国四年"中的四作"≡"[⑤]，显然，它可

① 劳乃宣．古筹算考释（卷一）．光绪十二年（1886）刊本。

② 张耒．张太史明道杂志．涵芬楼影印《顾氏文房小说》本。

③ 黄长睿．燕几图．《丛书集成新编》第48册。

④ 这并不排除中国古代对其它各种进位制的研究与应用。如干支纪年为六十进位制等等。此外，18世纪前，中国已对p进制有深入的研究。见李兆华．汪莱《递兼数理》与《参两算经》略论．吴文俊主编．中国数学史论文集（二）．1986

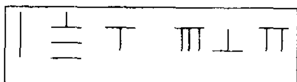
⑤ 中国科学院考古所．居延汉简甲编．第1161号简．北京：科学出版社，1959

用 4 根算筹表出。同类的例子还可在王莽时代的钱币上见到。传本《夏侯阳算经》说，“满六以上，五在上方，六不积算，五不单张”。从这里可知，“五”可用 5 根算筹表示出来。而“六”以上的 4 个数目字不再累积算筹，要用一根算筹置于上方表 5。《孙子算经》说，“一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当”。由此可知，一至九这 9 个数目字有纵横两种形式。按照这样的记载以及以后的算式，可以确定，用算筹所表示的一至九这 9 个数目字有下列两形式。

纵式　𝍠、𝍡、𝍢、𝍣、𝍤、𝍥、𝍦、𝍧、𝍨

横式　𝍩、𝍪、𝍫、𝍬、𝍭、𝍮、𝍯、𝍰、𝍱

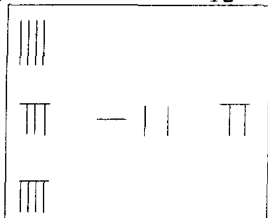
可以看到，其中任一个数目字，最多用 5 根算筹即可表出。采用纵横两式，在表示多位数时有明显的优越性，它可以防止相邻两数目字的混淆。用算筹不能直接表示数目字“〇”，多位数中的零是用空位来表示，《孙子算经》称之为“空绝”[1]。例如，1860867，用算筹表示为



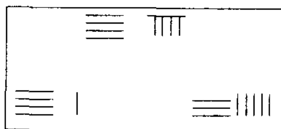
其中，纵横两式的使用遵循“一纵十横”的法则。𝍥与𝍧均为纵式表示其间有一个数目字“〇”。算筹表示分数时不标示分数线。按古算竖行从右至左布列的习惯，一般是分母在右，分子在左。但亦有相反的情形或分母在下、分子在上的情形。如《孙子算经》卷上第四题是“平分术”的例子，其分母、分子的位置便有两种情

① 但不能由此断言早期的中国数学没有“〇”这个数目字。这个符号在陶文及汉简中都可见到。《居延汉简甲编》第 2354 号简上的“〇”，其意义尚不甚清楚。若联系 1941，2326，2334，2335，2346 等号简正文末尾的数目字来看，则该“〇”号有可能是一个序号。

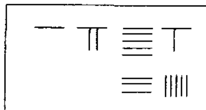
形。按术文，将$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$三数通分，求出其算术平均数。约分之后得，$\frac{4}{12}$，$\frac{8}{12}$，$\frac{9}{12}$的算术平均数为$\frac{7}{12}$。这个结果用算筹表示为



显然，对$\frac{4}{12}$，$\frac{8}{12}$，$\frac{9}{12}$而言，分母在右，分子在左。对$\frac{7}{12}$而言则恰好相反。带分数的表示，一般是整数部分在上，分母居右下，分子居左下。化为假分数时分子在上，分母在下。例如，在《张邱建算经》卷上第 3 题中可以看到 $49\frac{41}{35}$表示为



化为假分数可表为



用算筹表示负数的方法亦属简便。归纳起来，其法可分两端。一、以不同颜色或不同形状的算筹区别正数与负数。《九章算术》方程章刘徽注云，“正算赤，负算黑”。沈括说，“算法用赤筹、黑筹，以别正负之数”。[①]《隋书》律历志“正策三廉”，“负策四廉”都属

① 沈括．梦溪笔谈．(卷八)．《丛书集成初编本》。

此类。二、算筹无区别而从数字本身区别。刘徽在“正算赤，负算黑”之后复云“否则，以邪正为异”，即属此类[①]。

2. 九九表

九九表是筹算的主要口诀。《周髀算经》卷上云，“矩出于九九八十一”。赵爽注云“九九者，乘除之原也”。传本《夏侯阳算经》云，“夫乘除者，先明九九”。可见，它为筹算的基本内容之一。“九九表”本身是简单的乘法运算。因此，在算筹出现之前人们或许已经了解这些知识。然而，总结成这样一套系统的口诀并认识到其重要性，当是随着算筹的发展而完成的。《韩诗外传》载，“齐桓公设庭燎，为便人欲造见者。期年而士不至，于是东野有以九九见者。桓公使戏之曰，九九足见乎？鄙人曰，臣闻君设庭燎以待士，期年而士不至。……夫九九薄能耳，而君犹礼之，况贤于九九者乎？”[②] 这一记载令人想到，包括九九表在内的一些筹算知识在齐桓公（前685～643）时期已属普及性的知识了。

九九表的某些部分散见于秦汉古籍。如《管子》地员篇有“二七十四”、“三七二十一”、“六七四十二”、“七七四十九”、“七八五十六”及“七九六十三”共六句。《淮南子》地形训有按序排列的“九九八十一”至“二九一十八”共8句。敦煌汉简存17句[③]，居延汉简亦有残存[④]。目前所见完整的九九表以《孙子算经》卷上的记载为最早。从出土的汉简等资料来考察，《孙子算经》之前的

① 用算筹表示负数的方法在筹码算式中有所反映。李锐云，“秦道古《数学九章》卷四上开方图，负算画黑，正算画朱，并与刘徽《九章》注正算赤，负算黑之说合”。见《益古演段》卷上，白芙堂丛书本。今本秦书已无此区别。宋元时期的算书中，在数字的末位画一斜道儿以表负数，这个斜道儿即是负号。此当源于以算筹的邪正以别正负的方法。

② 韩婴．韩诗外传（卷三）．嘉庆己未（1799）刊本。

③ 罗振玉、王国维．流沙坠简．小学术数方技书第五页第二简，1914年印本。

④ 中国科学院考古所．居延汉简甲编．第264号简．北京：科学出版社，1959

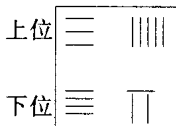
九九表有如下两点应当指出。一、始于九九八十一，与现在通行者恰成反序。二、不载“一九如九”至“一一如一”9句。因此，共36句。敦煌汉简九九表残存六行，其末行云，“大凡千一百一十”。与《孙子算经》所云“右九九至一一，总成一千一百五十五”相较，不足45。这45恰为“一九如九”至“一一如一”的和数。

3. 筹算的四则运算

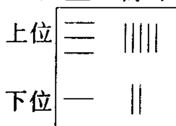
除十进位值制、记数法、九九表这些基本内容之外，本身特有的运算步骤与格式乃是筹算最重要之特点。本节只介绍四则运算，至于分数运算以及各类具体问题的运算步骤格式等，因涉及问题较多，将在各有关章节中陆续介绍。

现存古代数学著作没有筹算加法与减法的举例说明。故一般数学史著作对此略而不论。我们看到《孙子算经》卷下第三十一题，即通常所说的“鸡兔同笼”问题中包含有这方面的一些内容。该题要做47－35及35－12这两次减法。按照术文，运算步骤如下。

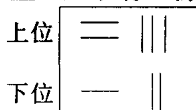
上置35，下置47，



以少减多，上3除下4，上5除下7，



再命之，下有1除上3，下有2除上5，

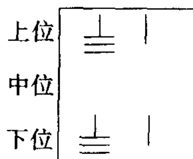


第二步图式中，下位的一‖为47－35的结果12。第三步图式中，上位的=|||为35－12的结果23。从运算步骤可见，该题中，被减数与减数的上下位置无硬性规定。第一步图式中，上位为减数，下位为被减数。而在第二步图式中，情形恰好相反。其次，减法由左向右进行，即位值高者先减，低者后减。这两点与现在笔算均不相同。开方运算中，也包括减法运算。此时减法亦是先左后右顺序进行，但被减数常在上位，而减数常在下位。具体例子见《张邱建算经》卷中第二十题的演草。

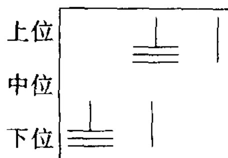
由于加法与减法互逆，可以推测，筹算加法应与减法有类似情形。即两数相加不论上下位置且从左至右依次进行。

筹算的乘法、除法的演算步骤与格式在《孙子算经》中有比较具体的说明。传本《夏侯阳算经》也有简要的叙述。《孙子算经》说，“凡乘之法，重置其位。上下相观，上位有十步至十，有百步至百，有千步至千。以上命下，所得之数列于中位。言十自过，不满自如。上位乘讫者先去之，下位乘讫者则俱退之。六不积，五不只。上下相乘，至尽则已”。以81×81为例，其步骤、格式如下。

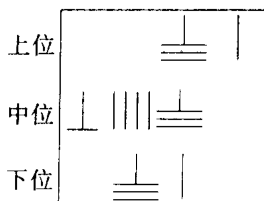
上位置81，下位亦置81，



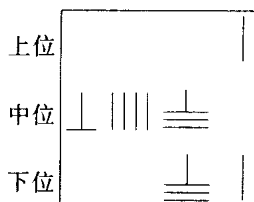
下位向左移，令个位1对上位8，



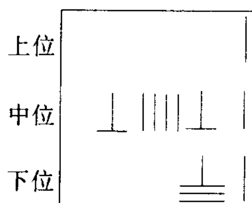
以上8呼下8，置6 400于中位。以上8呼下1，置80于中位，



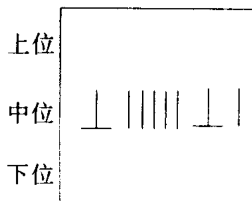
收上位80，下位退一等，



以上1呼下8，置80于中位。以上1呼下1，置1于中位，

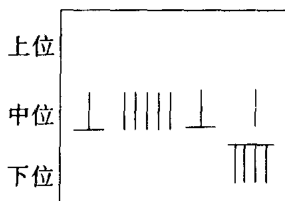


上下位俱收，中位6 561为所得。

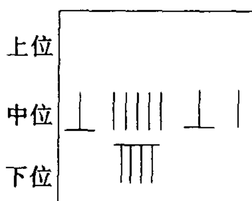


筹算除法中，被除数称为“实”，除数称为“法”。传本《夏侯阳算经》将除得之数称为“上商”。《孙子算经》说，“凡除之法，与乘正异。乘得在中央，除得在上方”。以 6 561÷9 为例，其步骤与格式如下。

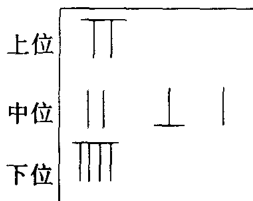
中位置 6 561 为实，下位置 9 为法，



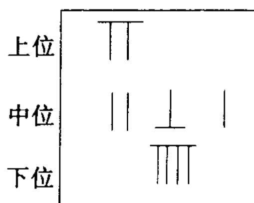
下位向左移，与中位 5 对齐，



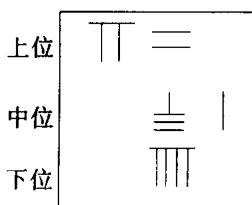
上位置 700，以上 7 呼下 9，除中位 6 300，



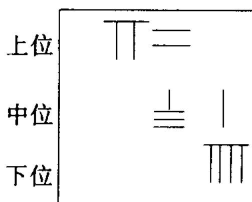
下位退一等，



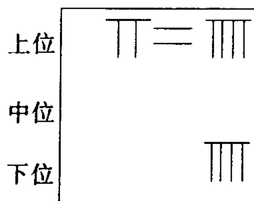
上位置 20，以上 2 呼下 9，除中位 180，



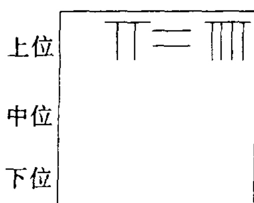
下位复退一等，



上位复置 9，以上 9 呼下 9，除中位 81，中位并尽，



收下位，上位 729 为上商。



在筹算除法中，实与法分别置于中位与下位。也有些中国古代数学著作，把相乘的两数分别称为实与法。其中置于上位的称为实，下位的称为法。这样，无论乘或除运算都有法与实的名称，也都有固定的位置。这与加减运算稍有不同。其次，在乘除运算中，均由左向右依次进行。这与加减运算的情形相同。应该注意的是，乘除运算中，“法”都要左右移动，它有明确的定位作用，这一点在开方运算中还可见到。

从四则运算的考察，我们体会到，筹算四则运算的思想方法是连贯一致的。

第 四 编

秦汉天文历法与工程中的数学

在天文历法研究中离不开数学，中国历史上人们常把天文历法与数学合在一起称为历算。天文历法研究不仅利用现成的数学知识做为工具，而且往往由于计算需要在数学上有所创新，促进数学的发展。在秦、汉时期这方面的表现尤为突出。在其他一些工程技术中也同样以数学为工具，使数学本身受益。本编主要论述秦、汉时期天文历法和工程中的数学。

第一章 “周髀”中的数学内容

《周髀算经》是研究中国天文学史和数学史的学者都非常熟悉的中国最早的天算著作。但是它最初并无“周髀算经”之名，估计连简单的书名都没有。本编在正文中一般不用《周髀算经》，而权用“周髀”或《周髀》。

在这部书中用到了较多的数学知识，有些还相当重要，因此它也就成为研究中国数学史的珍贵依据资料。本章将对其成书过程和所包括的数学内容作一较全面的探讨。

第一节 “周髀”的成书过程

现传本《周髀算经》给人一种非常神秘的印象，在数百年中没有丝毫表露，到东汉末和三国时期突然出现，它没有作者，但两次用到“昔者”，说明系长期积累而成，绝非出于一人之手。长期以来对其成书时代众说纷纭，迄今无统一的公认的观点。三国时赵爽在《周髀序》中有一句话是解开这个谜的一把钥匙，即“浑天有《灵宪》之文，盖天有《周髀》之法。累代存之，官司是掌。”这“官司是掌”四个字至关重要，明确说明《周髀》是长期掌握在官司人员手中，原是一部官书。

下面即以官书的观点探讨《周髀》成书的过程。

现传本《周髀算经》分为上下二卷，从文字内容来看又分为三个历史阶段，第一阶段从开头“昔者周公问于商高曰”起，到“周公曰：‘善哉!’”不算标点符号有264个字，在这段中还有“勾股圆方图”和“勾股圆方图”完全同样的两句，都是单起行[1]，不知是原文抑或后人所加，故未计入。

第二阶段从“昔者荣方问于陈子”起到“日光四极当周东西各三十九万一千六百八十三里有奇”，也就是到陈子回答荣方问题完了。以下为第三阶段，所占份量最大，从上卷最后起和整个下卷。

经仔细阅读即可发现：三个阶段的风格不同，前两阶段都是两人问答，进行互相讨论。第一阶段的主题是“天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出?”引出了勾股定理、矩和盖天说三个内容。在这里没有涉及立杆测影问题，因此只字未提“周髀”之事。

---

① 据文物出版社影印宋刻本。

第二阶段是荣方向陈子请教怎样知道太阳之高大和远近之数，这才正式讲到"周髀"问题，陈子通过"周髀"测量日影、利用相似勾股形和勾股定理与竹筒望日等来回答荣方的问题。但是荣方不知道什么是"周髀"，于是又问："周髀者何？"陈子回答说："古时天子治周，此数望之从周，故曰周髀。髀者，表也。"因此是否可以说，"周髀"一词系由陈子所定？数学计算明显多于第一阶段。

第三阶段与前二阶段迥异，一是非问答形式，二是几乎全是计算问题，有"术"（讲计算步骤）13 条，已经算术化了。

有了以上的一些基本情况，就可以探讨"周髀"的成书过程。为了说清楚这个问题，还要做一个假定，即口传说。首先，"周公问于商高曰"，周公在历史上真有其人，是周武王的弟弟姬旦，因而有时称其为周公旦。据记载，"旦巧能，多才多艺，能事鬼神。"[①]武王即位时以"周公旦为辅"[②]，地位极高。在武王克殷的第二年，武王病，他设坛，还"戴璧秉圭"进行告祝周先人。同时令史策占卜吉凶[③]。武王去世后，周公继续辅佐成王（开始时因成王年少，他代行王政）。可是商高为何许人，只有赵爽的一句话："周时贤大夫、善算者也。"不见其他记载。近年来有人提出一些看法[④]，可以做为参考。

根据上述情况来看，周公既然多才多艺，又能事鬼神，向人请教天算问题乃是自然之事。"善算"的商高，肯定是与周公经常接触的人，很可能就是当时进行占卜吉凶的史策。史策这种官职相当于后来的太史令，是负责国家天文观测和祭天的双重工作，占

---

① 《史记》卷 33 "鲁周公世家第三"。

② 《史记》卷 4 "周本纪第四"。

③ 《史记》卷 33 "鲁周公世家第三"。

④ 李继闵．"商高定理"辨证．自然科学史研究，1993，12（1）：29～41

卜是其职务之内的任务。中国早在新石器时代就有传说中的这类专职人员，周代更不例外，早在发迹之初，周文王就在今陕西省西安市西北建有灵台[①]，是一处兼观天和祭祀活动的场所，这就是史策经常工作的地方。想必商高也到过该处。在成王的时候，“周公往营成周洛邑”[②]，“洛邑”即洛阳。营建洛邑期间，周公应有史策随同前往。史策要给周公进行测量和计算。在这些活动过程中，周公与史策商高多所接触，利用这些机会，周公向商高学习、请教是十分自然的事情。

周公与商高的问答应是在这时进行的。西周初年还大量使用甲骨文，近年来已发现好几批，按理说有些可以刻在甲骨上。实际上，甲骨文主要是卜辞，把人们讨论学术问题的文字记录在甲骨上不太可能。唯一的可能性就是口传，由于二人的地位之高，问答词便成为在灵台工作的人员的重要学习内容，并世代口传下去。在口传过程中，问答词不一定完全保持一字不变，意思不变也就差不多了。

口传经过的时间肯定相当长，至于何时变成有文字可查的文献，下面还要讨论，此处暂不论述，反正已是“昔者”了。

大约周公、商高问答之词比保存下来的要多，一直传到荣方与陈子的时候，赵爽在《周髀》注中说：“荣方、陈子是周公之后人”，又说：“荣方闻陈子能述商高之旨，明周公之道。”这也多少表明陈子通过口传方式而不是书面知道周公与商高之问答的。可以明确地说：周公和商高是西周初的人，学术界对此点没有怀疑。但是荣方和陈子的年代就不明确了，按照古人对知识分子称呼“×子”的习惯应是春秋战国时代。这位陈子能得口传的前人天算知识，他应是国家天文机构的研究人员，而不是平民天文学家。又，

---

① 陈直. 三辅黄图校证. 西安：陕西人民出版社，1980. 105

② 《史记》卷33“鲁周公世家第三”。

前面已引过陈子在回答荣方的“周髀者何？”时说“古时天子治周”，说明距周成王营洛邑已有相当长的时间，与春秋战国时代符合。

由上述可知，在西周初周成王由周公营建洛邑时进行过用标杆测量日影的工作。“周髀”应已出现。在洛邑测量的结果是“周髀长八尺，勾之损益寸千里”。周成王当时在丰（今陕西省咸阳市之南）为什么要营建洛邑？原来武王就有这个想法而未成，经周公勘察认为“此天下之中、四方人贡道里均。”[1] 八尺高的标杆可能就在此次勘察中用过。不过当时不应称周髀，也未构成周公与商高的问答之内容，这件事是流传下来，被陈子所掌握，是他首次把此标杆叫周髀（也许在他以前有人这样叫过）。

陈子在回答荣方的问题时，只是说周髀是古代的，其余的内容基本上都是他本人的发挥，与古人无关。

但是，记载荣方和陈子问答的又是很久以后的人，所以开头也说“昔者”。这个人必是一位精通数学的天文学家，而且有接触国家天文机构的机会，在天文机构中任职的人则更合适。在第三阶段开始不久引有“吕氏曰：‘凡四海之内，东西二万八千里，南北二万六千里。”此语出于战国末吕不韦（？～前235）的《吕氏春秋》，距秦统一全国也只有一二十年的历史了。因此不会早于吕不韦。

又，在书中讲到二十四节气时由冬至起的第六个节气叫“启蛰”而不叫“惊蛰”，说明第二次说“昔者”的人又应是汉景帝刘启即位之前，因未避景帝讳。景帝于公元前156年即位。由此可知，该人必在公元前240～前156年之间，亦即秦、汉间。

在这段历史时期内，最合适的人物莫过于张苍了。在第三编第一章中已介绍过张苍其人，他是秦、汉之际最大的数学家和天

① 《史记》卷4“周本纪第四”。

文学家，“明习天下图书计籍，又善用算律历”[1]。汉初的历法就是张苍制订的，“汉兴，北平侯张苍首律历事”[2]，“用《颛顼历》，比于六历，疏阔中最为微近。”[3] 很显然，收藏于秦、汉政府有关部门的天文历法图籍实际归张苍所掌管，口传的资料也必传给他。可以说，历史上传流下来的天文历法资料都集中于张苍一人之手。

有理由认为张苍是“周髀”的定稿人，由口传到书面文字。书中的第三阶段应完全出于张苍的手笔。全书的文字部分，按当时的技术水平只能是写在竹简上，而图形则明言是画在缯上（已佚）。因为这书是官书，又是长期传下来的内容的继续，所以不应个人署名，而成为佚名的著作。当时也未必有书名，连《周髀》都不存在。周髀，如前所述仅是周成王时用于特定地点的测日影的标竿，换句话说是一种极简单的测量工具，而且在全书也只占很小的部分。但是，它好叫，也好记，就像一个人没有名字，人们为了明白所指对象取一外号一样，于是用“周髀”代替了全书。由外号或俗称演变成书名还要经过三四百年的时间。将在本书的第三卷来说明这一点。

还有一个问题需要说明，就是两卷的划分同样是相当晚的事情。

从“周髀”的成书过程，可知其中的内容分为三个历史时期，西周初的、春秋战国的和西汉初的，不能混淆。又因为同居一书，无法分开，所以只好全部放在这里集中讨论，该书毕竟是西汉完成的作品。

---

① 《汉书》卷42“张周赵任申屠传”。

② 《汉书》卷21上“律历志第一上”。

③ 《汉书》卷21上“律历志第一上”。

第二节　"周髀"中的几何知识

"周髀"虽然是一部天文学著作，但是由于天文学研究的需要，其中也用到了许多数学知识。因此，这部书便成为研究中国古代数学史必须依据的重要原始文献。

"周髀"中的数学知识，基本上属于算术和初等几何两方面。这一节主要讨论其中的初等几何知识。

1. 勾股定理及其应用

"周髀"卷首记述了一段精彩的对话，千百年来都引起人们浓厚的兴趣。"昔者周公问于商高曰：……古者包牺立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？"商高曰："数之法，出于圆方。圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一。故折矩以为勾广三，股修四，径隅五。……故禹之所以治天下者，此数之所生也。"这是我国有关勾股定理的最早记录。这里叙述了一个勾股定理的特例。其中最精辟之处为"故禹之所以治天下者，此数之所生也。"这在数学思想发展史上应占有重要的地位。

赵爽在注中写到"禹治洪水，决流江河，望山川之形，定高下之势，除滔天之灾，释昏垫（百姓）之厄，使东注于海而无浸逆（溺），乃勾股之所由生也。"禹是传说中古代部落联盟领袖。据记载，约在公元前21世纪，他继承父志，疏导江河，兴修水利，《周髀算经》所说"此数之所由生"，当即指此。

关于勾股定理的一般形式，"周髀"是这样阐述的："求斜至日者，以日下为勾，日高为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得斜至日"[①]（图4·1·1），即

斜至日（弦）$=\sqrt{勾^2+股^2}$

① 钱宝琮．校点《算经十书》上册．127

这里所用之勾股定理在叙述上是一般情形。一般勾股定理应用的实例放到本章第三节“开方运算”中。这个一般形式的勾股定理在国外多数人称之为毕达哥拉斯定理。据史载，由毕达哥拉斯（Pythagoras. 前 572～前 497）领导的毕达哥拉斯学派曾证明了这个定理，即“一个直角三角形斜边的平方等于另外两直角边的平方和”。相传当时杀了一百头牛以示庆祝这个胜利。可惜证明资料并没有传下来。“周髀”中陈子阐述的一般形式的勾股定理也没有见到证明资料，在我国最早的证明是由三国初年数学家赵爽在《勾股圆方图注》中给出的。据 E. S. 鲁米斯搜集整理，数个世纪以来，关于勾股定理不同的证明已多达 370 种，[①] 详尽的论述放到后面，关于勾三股四弦五的特例在埃及也找一“拉绳者。”[②]

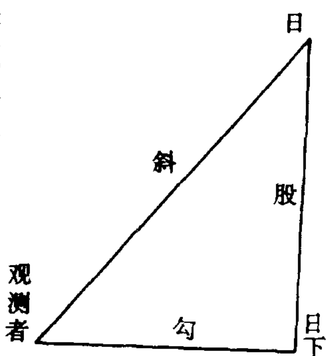


图 4·1·1 “斜至日”图

大约同一时期的印度人在这方面比埃及人做得更好一些。他们发现，直角三角形的各边间的关系除 3：4：5 外，还有另外一些比例。这些数组记载如下：

12，16，20； 8，15，17； 15，36，39；

5，12，13； 15，20，25； 12，35，37。

可惜的是不管是埃及人还是印度人，他们都没有花时间去考虑这些关系为什么成立？上述历史事实表明，人类文明发展较早

① W. H. 格伦，D. A. 约翰逊. 勾股定理. 白纪云译. 北京：科学出版社，1984. 17

② W. H 格伦，D. A. 约翰逊. 勾股定理. 白纪云译. 北京：科学出版社 1984. 1

的国家如巴比伦、埃及、印度、希腊、中国等，对勾股定理及勾股数的认识、研究和应用等都是很早的，大家都为此作出了很多贡献。而以“禹治洪水……此乃勾股之所由生也”所记载的历史最早，所以国内称它为“勾股定理”是适当的。

关于矩的应用。在“周髀”中有一段阐述，周公曰：“大哉言数！请问用矩之道。”商高曰：“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。”这段话充分地体现了我们伟大祖先的聪明才智！这是他们在漫长的历史岁月中广泛应用勾股形于实践的高度概括。深刻理解这些话的含义，就可以清楚地推断商高时代的勾股测量技术以至整个数学发展的水平。因此，梁宗巨认为“这几句话在中国数学史上有着头等的重要性。”[1]

下面，对“用矩之道”分别进行阐述：

“平矩以正绳”是用矩来确定铅垂和水平方向的。办法是将矩的一边靠在悬垂的线上，另一边就是水平方向。（图 4·1·2）

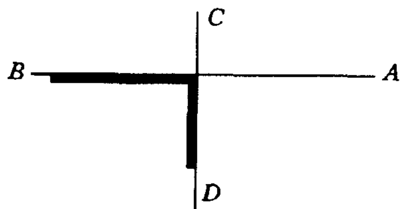


图 4·1·2

“偃矩以望高”，偃即仰。“偃矩以望高”就是把矩直立起来以测物体之高度。具体方法是（图 4·1·3）：

EF 为所求之高（X），F 刚好在 CB 之延长线上，置目于 C 点，仰望 E 点，同时记下刻度 a 与 b，后直接度量 C 到 F 的距离 A，这样就可由 $a:b=A:X$ 而求得高度 $X=\frac{Ab}{a}$。

这个方法我们在前面讲述“太阳有多高”时已经见到它的雏

[1] 梁宗巨．世界数学史简编．326

形。只是那里的表与影到这里已抽象成矩的两根尺了，而这里需要直接度量的水平距离在那里是按一寸千里说而确定的。

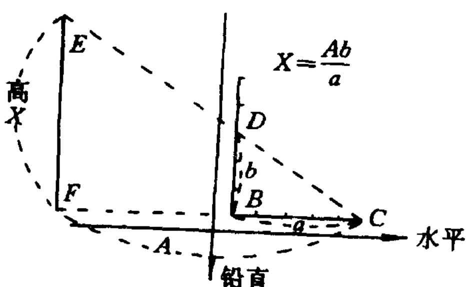


图 4・1・3　“偃矩以望高”图示

“覆矩以测深”与“卧矩以知远”，其原理皆与上同（图 4・1・4）。

对“环矩以为圆”近代众多学者的理解分歧较大，现分别介绍如下：

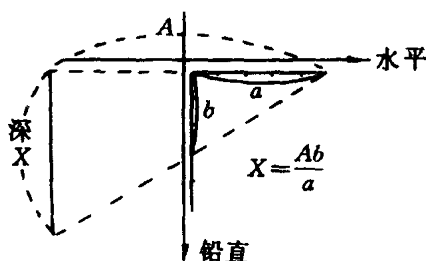
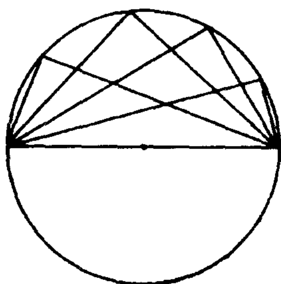
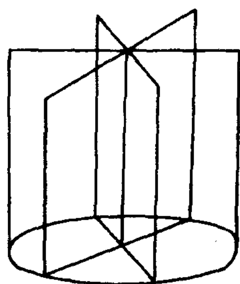


图 4・1・4　“覆矩以测深”图示

李俨：“直角三角形固定弦，其直角顶点的轨迹便是圆，即是‘环矩以为圆’的解释。（见图 4・1・5）

梁宗巨：“环矩以为圆，……”解释是很简单的。固定直角三角形（矩）的斜边（弦），


图 4・1・5
李俨“环矩以为圆”图示


图 4・1・6
傅溥“环矩以为圆”图示

直角顶点的轨迹便是圆，这是“环矩以为圆的意思。”[①] 与李俨的看法相同。

傅溥：“环矩以为圆”就是将矩形直立于平面上，固定其一边而使他边绕它回转时，那回转边下端的轨迹，便是圆。”[②]（见图 4 · 1 · 6）

李约瑟：“让直角三角形旋转（规），可以画出圆形，……”

李迪：“环矩以为圆”是指矩的顶点不动，而两边在平面上旋转，其端点就画出一个圆。[③]（见图 4 · 1 · 7）

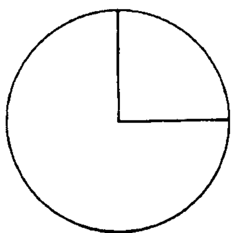


图 4 · 1 · 7
李迪“环矩以为圆”图示

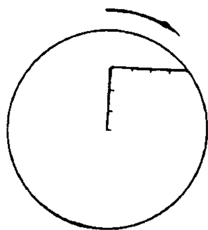


图 4 · 1 · 8
陈遵妫“环矩以为圆”图示

陈遵妫：“以矩的一端为枢，旋转另一端，可以成圆，即所谓环矩以为圆。”[④]（图 4 · 1 · 8）

根据“为圆必为规”、“圆者中规”的古训，我们认为要用“矩”作圆，就必须找出“矩”与“规”在本质上的共同之处来。事实上，当我们把矩的长短两尺当作“规”的两只脚，直立于平面上，以矩的一端为枢，旋转时另一端即可成圆。“环矩以为圆”

① 梁宗巨．世界数学史简编．328
② 傅溥．中国数学发展史．34
③ 李迪．中国数学史简编．56
④ 陈遵妫．中国古代天文学简史．119

就是这个意思。(图 4・1・9)。这是又一种理解。

“合矩以为方”就是把两个矩合起来便可构成一个正方形（或矩形）。

关于“用矩之道”这类问题是由天文历法、整治洪水等引起的，而实际上已广泛应用于其它方面，只要满足条件即可。



图 4・1・9
“环矩以为圆”图示

综上所述，矩的使用，确是我国古代数学的特色。它不但可以用来画直线，作直角，而且可以用于测量，有时还可代替圆规，堪称万能工具。真可谓“矩之于物，无所不至。”

总之，本章叙述勾股弦定理，用矩之法，可以用以测天度地；这是测天最初之术，而为后世天算方法的基础。例如测高望远，孙子有量竿之术，刘徽有海岛之经，皆不外乎以勾股法为本。

2. 勾股比例的数学思想

我们在阐述“周髀”中关于天文及数学内容的过程中，发现它始终贯穿着一种极为重要的数学思想——勾股比例。

比的思想，商高在回答周公的第一个问题时就蕴含了这个内容。“数之法，出于圆方……故折矩以为勾广三，股修四，径隅五。”按赵爽注文：“推圆方之率，通广长之数。”所谓“故折矩”，诚如赵爽所注“……将为勾股之率，故曰折矩也。”使勾股按一定的比率（3∶4）去折一矩时，这样弦就必然是五，从而得到圆方斜径相通之率。因为按照古法，直径为一的圆周是三，每边长为一的方匝四边总长为四，故以单位长为直径的圆周为勾，方匝的四边总长为股时就得到圆方斜径相通之率了。即构成一组勾股数了。按这种比率（即 3∶4∶5）所组成的三角形是直角三角形。

书中第二段讲的是“用矩之道”。无论是‘望高’、‘测深’，还是‘知远’，其中都用到了勾股比例的思想。现以‘卧矩以知远’为例加以说明。如图 4・1・10 所示。为了测得 M，N（或 M，

R）两点的距离，使 R，Q，N 三点共线，从 R 看 M 点的视线交矩的另一尺于 P 点。当读得矩尺上的数据分别为 a 和 b 时，即可算得弦 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，再量出 RN 的长度为 A 时，则从三角形 RPQ 相似于三角形 RMN

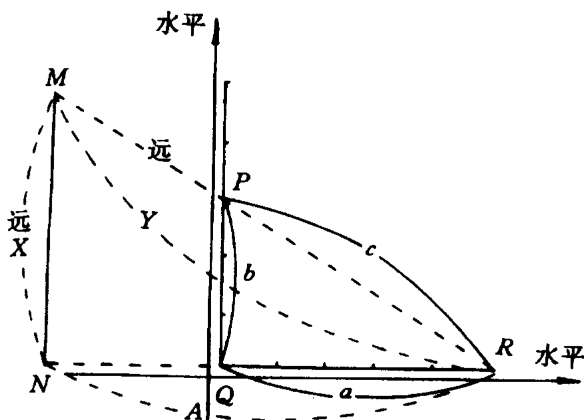


图 4・1・10 "卧矩以知远" 图示

可得出

$$\begin{cases} a : b = A : X \\ a : c = A : Y, \end{cases}$$

$$即\begin{cases} X = \dfrac{Ab}{a} \\ Y = \dfrac{Ac}{a} \end{cases}。$$

我们在阐述"一寸千里说"时，也处处离不开勾股比例的思想。"勾之损益寸千里"本身就是一根比例尺。书中所以能用立表测影之法得出夏至日中的太阳在周地南 1 万 6 千里，冬至日中的太阳在周地南 13 万 5 千里，太阳高于地面 8 万里的结论，都离不开"影差一寸，地远千里"的比例尺。正由于夏至那天日中所测

之影长为1尺6寸，才能由下述比例式

1寸影：1 000里=16影：X里

解得X=16 000里。

当影长6尺时，则日下地远周地南6万里，这时，日高(BC)可由$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$对应边成比例的关系式求得：即$AE:AB=DE:BC$即$BC=\frac{BA}{AE}\cdot DE=8$（万里）。周地远离太阳的距离（$AC$）也相应地可由下述比例式求得：

即$AC:AD=AB:AE$

即$AC=\frac{AB}{AE}\cdot AD=10$（万里）。经文中所述利用竹筒测太阳直径之法也是用了相似与比例的思想，没有"率八十寸而得径一寸"的比率思想，求日径也是不可思议的。

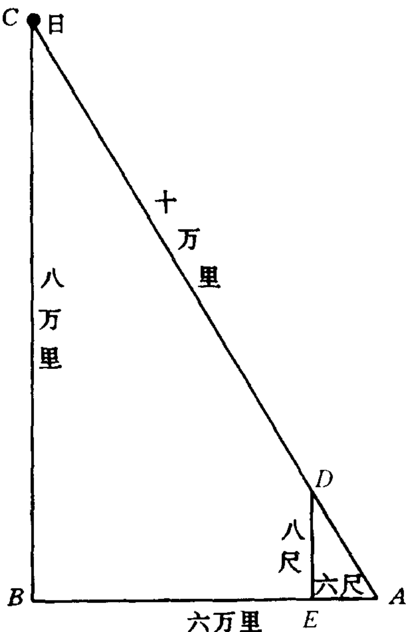


图4・1・11　测日高远示意

在北极璇玑回游的测量中，也贯穿着比例相似的数学思想。经文曰："正极之所游，冬至日加酉之时，立八尺表，以绳系表颠，希望北极中大星，引绳致地而识之。又到旦明日加卯之时，复引绳希望之，首及绳之地而识其两端，相去二尺三寸。故东西极两万三千里[1]。（图4・1・12）

[1] 钱宝琮．校点《算经十书》上，54。

其中W：西游所极

E：东游所极　　AC：八尺之表

DF：其两端相去2尺3寸

BC：其绳致地所识去表1丈3尺

P：天球北极　　Q：北极正下方处

由1寸千里的比例，则可从$BC=10.3$丈推算得到BQ为十万三千里。即周地到北极下地的距离。

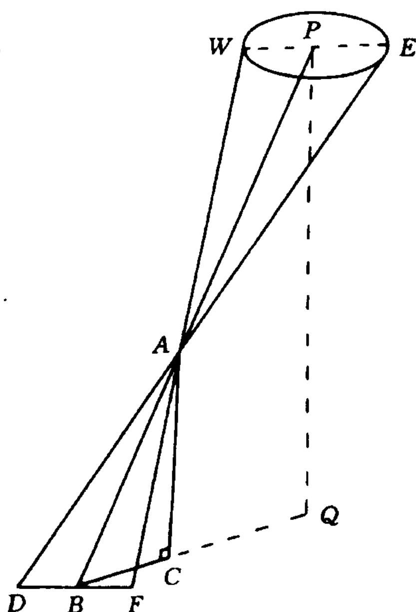


图4·1·12

又因为$\triangle ADF \backsim \triangle AEW$，所以$WE$与$DF$是对应边，仍用1寸千里的比例$\frac{WF}{DF}=\frac{1000\text{里}}{1\text{寸}}$，所以

$$WF=\frac{1000\text{里}}{1\text{寸}}\times 23\text{寸}$$
$$=23\ 000\ (\text{里})$$

由此可见"周髀"从头至尾始终蕴含着比例相似的数学思想。实际上，这种思想在《淮南子》中已经用定理的语言记载了如下结论："若使景与表相等，则高与远等也。"[①]意思是如果表高与表影相等，则只需测出物影之长，不可达的物高也就知道了。如(图4·1·13)



图4·1·13

① 《淮南子》卷三"天文训"。

第三节 “周髀”中的算术代数知识和数学观点

“周髀”中的算术代数知识比较丰富，包括分数运算、等差数列、一次内插法和开平方等。书中还涉及到对数学的一些看法。下面依次加以讨论。

1. 分数运算

“周髀”的某些内容，显示了在分数计算方面已经达到了很高的水平。而这些复杂的分数计算，在天文历法数据的计算过程中又是非常必要的。

例 1 “周髀”中认为一年的长度为 $365\frac{1}{4}$ 日（太阳在黄道上，每日行一度），并且认为 19 年应置入 7 个闰月，这样平均每年应有 $12\frac{7}{19}$ 月，根据甄鸾的注释，每个月的日数应是：

$$365\frac{1}{4}\div 12\frac{7}{19}=\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}$$

$$=\frac{1461}{4}\times\frac{19}{235}=\frac{27759}{940}=29\frac{499}{940}。$$

例 2 “周髀”中写有“内一衡径二十三万八千里，周七十一万四千里。分为三百六十五度四分度之一。度得一千九百五十四里二百四十七步千四百六十一分步之九百三十三。”

“内一衡”是一个直径为 238 000 里的圆周，那么周长就是 238 000×3＝714 000（里）。整个圆周分为 $365\frac{1}{4}$ 度。故每一度的弧长是

$$714\ 000 \div 365\frac{1}{4} = 714\ 000 \div \frac{1461}{4}$$

$$= 714\ 000 \times \frac{4}{1461} = 2\ 856\ 000 \div 1\ 461$$

$$= 1\ 954\frac{1206}{1461}\text{（里）。}$$

1 里＝300 步，再将分数化为步。

$$\frac{1206}{1461} \times 300 = 247\frac{933}{1461}\text{（步）。}$$

例 3　求小岁末，月不及故舍度数的方法，用小岁 $354\frac{348}{940}$日的日数乘月后天 $13\frac{7}{19}$度，得共后天 $4737\frac{6612}{17860}$度；再以周天 $365\frac{4465}{17860}$度除它，以其不足除者作为月不及故舍的分度数，即 $354\frac{6612}{17860}$度。其算式如下：

$$354\frac{348}{940} \times 13\frac{7}{19} \div 365\frac{4465}{17860}$$

$$= \frac{333108}{940} \times \frac{254}{19} \div \frac{6523365}{17860} = 12\frac{6329052}{6523365}$$

即　$\frac{6329052}{6523365} \times \frac{6523365}{17860} = 354\frac{6612}{17860}$……小岁月不及故舍的度数。

由此可知，“周髀”时代已熟练地掌握了分数的运算方法。更值得惊叹的是这么繁杂的分数计算都是用“筹”来进行的。但遗憾的是书中没有关于分数计算的系统讲解，也没有进行约分，这使得算草很繁。

2. 等差数列和圆周长求法

“周髀”有“七衡六间”，就是 7 个同心圆，书中规定：“一衡之间万九千八百三十三里三分里之一”，即相邻两衡间的距离（半

径差）为 19833 $\frac{1}{3}$ 里。欲求各衡的直径，只需知道内衡的直径即可。《周髀》中给出计算各衡直径的一般法则，即“欲知次衡径，倍而增内衡之径。二之以增内衡径，得三衡径。次衡放（仿）此”。这段话的意思是说要想求出次二衡的直径，须把半径差二倍再加上第一个圆周的直径，其余各衡径都可依此类推。7 个直径分别为：

内一衡径＝238 000 里
次二衡径＝277 666 里 200 步
次三衡径＝317 333 里 100 步
次四衡径＝357 000 里 000 步
次五衡径＝396 666 里 200 步
次六衡径＝436 333 里 100 步
次七衡径＝476 000 里

它们每后一衡径减前一衡径的差都是 39 666 里 200 步，因此这些数是以 39 666 里 200 步为公差的等差数列。这个公差就是相邻两衡间距离的 2 倍，即 39 666 里 200 步＝2×19 833 里 100 步。很显然，设内一衡的直径为 D_1，次二衡的直径为 D_2，它们之间的距离为 d，则有关系

$$D_2=2d+D_1$$

一般地有

$$D_n=2d+D_{n-1}$$

其中 $n=2，3，\cdots 7$。

“周髀”求出了每衡的周长，如内一衡的周长为 714 000 里，显然是由内一衡径乘 3 得到的，即 714 000＝3×238 000。这个 3 就是 π 的近似值。设 D_n 为直径，L_n 为周长，则有

$$L_n=\pi D_n=2\pi d+\pi D_{n-1}。$$

周长也是等差数列，公差为 $2\pi d$。

"周髀"中关于等差数列的记载和圆周长求法都是很有价值的内容[1]。

3. 一次内插法的应用

"周髀"卷下关于二十四节气日八尺标杆影长的数据只有冬至和夏至是实测的，其余都由计算而得。书中记载为"凡八节二十四气，气损益九寸九分，六分分之一。冬至晷长一丈三尺五寸，夏至晷长一尺六寸。问次节损益寸数长短各几何?"其中"损益"数 $99\frac{1}{6}$ 分的求得是把冬至影长与夏至影长相减，即 $1\ 350-160=1\ 190$（分）。因为由冬至到夏至共13个节气，除去冬至还有12个，用12去除上面的差得 $1\ 190\div12=99\frac{1}{6}$（分）。设 $f(a)$，$f(b)$ 分别代表夏至和冬至日影长，$\triangle$ 为损益数，则 $\triangle=\frac{1}{12}[f(b)-f(a)]$。$f(n)$ 是夏至到冬至的第 n 个节气的日影长，它的计算公式如下：

$$f(n)=f(a)+n\triangle。$$

例如求清明时日影长，便是

$$f(5)=160+5\times99\frac{1}{6}=655\frac{5}{6}\text{（分）},$$

就是影长为"六尺五寸五分，小五分"。计算中的"5"是指清明到夏至以前的第五个节气。其余节气也可同样计算。

上面的公式显然是个一次内插法公式，由夏至到冬至、由冬至到夏至是时间相等的，因此为等间距。"周髀"所载二十四节气日的中午八尺标杆的影长都是利用等间距一次内插法公式算出来的。后来的内插法公式都起源于历法研究，实际是一次内插法的

[1] 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 50

推广①。

4. 开方运算

“周髀”中已经记载了对任意正数的开平方法，对开方不尽即奇零小数的处理，有时用分数表示，有时则笼统地写“有奇”两字。例如已在前面天文内容中介绍过的人日距，就是巧妙地运用了特殊的勾股定理所求得的。

又如“周髀”中有“夏至之日正东西望，直周东西日下至周五万九千五百九十八里半。冬至之日正东西方不见日。以算求之，日下至周二十一万四千五百五十七里半。”按赵爽所注，其求法如下：

夏至日，太阳正在周地东西线的下地与周地的距离

$=\frac{1}{2}\sqrt{(\text{夏至日道径})^2-(\text{极去周地两倍})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{238\ 000^2-(103\ 000\times 2)^2}$

$=\frac{1}{2}\times 119\ 197$ （更精确的数字应为 119 197.315 4 有奇部分舍去。）（见图 4·1·14）

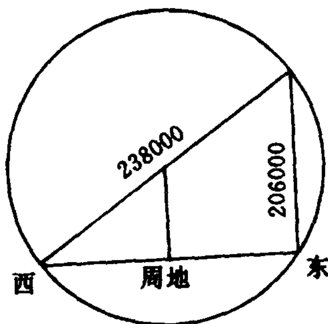


图 4·1·14 “夏至日下至周”示意

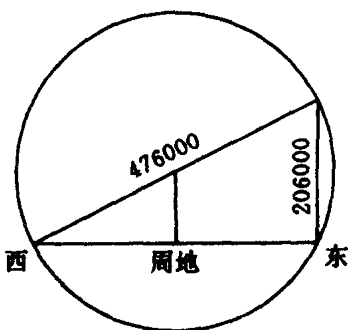


图 4·1·15 “冬至日下至周”示意

① 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 52

$=59\ 598.5\cdots\cdots$

冬至日，太阳正在周地东西线的下地与周地的距离

$=\frac{1}{2}\sqrt{(\text{冬至日道径})^2-(\text{极去周地两倍})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{476\ 000^2-(103\ 000\times 2)^2}$

$=\frac{1}{2}\times 429\ 115$

$=214\ 557.5\cdots\cdots$（根据甄鸾注，知上面问题的半里之后还应有 316 775/1 716 462 有奇部分舍去）。

5. “周髀”论数学

“周髀”中对数学的来源、特点、作用以及学习方法等方面都进行了有趣而精辟的论述。虽历经两千余年的岁月，仍不失其夺目之光彩，对于我们今天学习数学仍有一定的启迪。现摘录几段并予剖析。

数学的来源。在“周髀”卷首即载有周公问于商高：“……夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出?”商高曰：“数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩……故禹之所以治天下者，此数之所生也。”[①] 一问一答，开宗明义，揭示了数学的来源这样一个根本问题。

数学的特点。书中荣方请教于陈子：“今者窃闻夫子之道。知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，人所望见，四极之穷，列星之宿，天地之广，夫子之道皆能知之。其信有之乎?”陈子曰：“然。此皆算术之所及。”陈子又曰：“……此亦望远起高之术，……夫道术，言约而用博……”[②] 短短数语，道破了天文方面的众多问题，不外乎是“望远起高”之术的应用；数学的道理叙

---

① 钱宝琮校点．算经十书（上册）．13

② 钱宝琮校点．算经十书（上册）．13

述起来十分简要，而应用确是极其广泛的。这样就把数学的两大特点即数学的抽象性及数学应用的广泛性都阐明了。

学习数学的方法。当荣方根据陈子的指点，苦思冥想多日仍不得要领又去请教陈子时，陈子对他说："思之未熟。……则子之于数，未能通类。……问一类而以万事达者，谓之知道。"这就是说，学习数学必须要掌握归纳与推理的方法。只有这样，才能举一反三，触类旁通。也只有做到了"问一类而以万事达者"[①]才能算得真正的"知道"。

陈子接着又说："夫道术所以难通者，既学矣，患其不博。既博矣，患其不习。既习矣，患其不能知。"[②]这就是说，要想突破学习数学的难关，有几个环节是必不可少的。首先要学，要博览群书，以扩大知识面；其次，仅有知识的广度还不够，还必须对所学习的知识反复研习，以求其精深；再次，在反复研习的过程中，必须善于总结、归类，把知识系统化、条理化，即"能类以合类，此贤者业精习知之质也。"

关于学习态度，陈子也有独到的见解，他说："夫学同业而不能入神者，此不肖无智而业不能精习。"[③]这就是说在学习过程中必须专心致志，那种心游神荡，意不入神的态度是绝对不可取的。

总之上述几点，无论对了解数学或是学习数学的人都是颇有教益的。

---

① 钱宝琮校点. 算经十书（上册）. 24

② 钱宝琮校点. 算经十书（上册）. 25

③ 钱宝琮校点. 算经十书（上册）. 25

第二章　《三统历》中的近似分数计算法

中国古代历法的编制带动了整个天文学的发展，刺激了数学的进步。

我国历法的起源虽然可以远溯到传说时代，但其方法已无从查考。战国时期各国历法的具体资料留传至今者很少。所谓先秦“古六历”，即黄帝、颛顼、夏、殷、周及鲁历，现今也只留下一些片断的材料。载于《汉书·律历志》的《三统历谱》，是我国古代流传下来的最早的一部完整的天文著作[①]。它的内容包含造历理论，有节气、朔望、月食及五星等常数和运算推步的方法，是世界上最早的天文年历的雏形。

第一节　《三统历》之立法与数据

《三统历谱》分为七章：一统母，二纪母，三五步，四统术，五纪术，六岁术，七世经。统和纪是三统历谱的基本，统是推算日月躔离，纪是推算五星的见伏。统和纪又有母和术的区别，母是讲立法之原则，术是讲推算的方法。五步乃实测五星的记录。岁术是推算岁星之所在。世经是考究古代纪年，以证其术之有据。

《三统历》与《太初历》采用相同的基本常数，皆“用邓平所造八十一分律历”，即议定

---

① 《三统历》是由元封七年（前104年）行用的《太初历》改名而来。西汉末，刘歆将邓平的八十一分法作了系统叙述而成《三统历谱》。

$$一朔望月=29\frac{43}{81}=\frac{2392}{81}日，$$

由十九年七闰，所以

$$一回归年=12\frac{7}{19}=\frac{235}{19}朔望月，$$

因而

$$一回归年=\frac{2392}{81}\times\frac{235}{19}=\frac{562120}{1539}$$

$$=365\frac{385}{1539}日。$$

由此规定：

一章＝19 年＝235 朔望月，

在这个周期，朔旦冬至复在同一天；

一统＝81 章＝1 539 年＝19 035 月＝562 120 日，

在这个周期，朔旦冬至复在同一天的夜半；

一元＝3 统＝4 617 年＝57 105 月＝1 686 360 日，

在这个周期，又复在甲子那天夜半朔旦冬至。

《三统历》以 135 月有 23 次交食为周期，1 章又为 235 月，二者之最小公倍数为 6 345，即交食在 6 345 月后复起于朔旦冬至。

据《三统历谱》“纪母”所载五星与日之会合周期：

木星与日经 1 728 年会合 1 583 见[①]，即复原处；

金星与日经 3 456 年会合 2 161 复，而复于原处；

土星与日经 4 320 年会合 4 175 见，而复于原处；

火星与日经 13 824 年会合 6 469 见，而复于原处；

水星与日经 9 216 年会合 29 041 复，而复于原处。

计算木、金、土、火、水五星之大周的最小公倍数

〔1 728，3 456，4 320，13 824，9 216〕＝138 240，此为五

① 三统历把土、木、火三星的周期，叫做一见；金、水二星的周期，称为一复。

星会终之岁数，即经 138 240 年五星又复于原处。

再求五星与日月相会，即求五星会终与日月会岁[①] 之最小公倍数

〔138 240，513〕=2 626 560 年，

在此周期内，日月相会为

2 626 560÷513=5 120 会，

五星相会为 2 626 560÷138 240=19 次，

于是日月五星齐会。

若求五星会终与一统之最小公倍，即

〔1 382 420，1 539〕=7 879 680 年，

在此周期内，冬至朔旦夜半七曜齐同。

又求五星会终与一元的最小公倍数

〔138 240，4 617〕=23 639 040 年，

此周期内，冬至朔旦夜半七曜同复于甲子日。此即《汉书·律历志》所载"《三统》二千三百六十三万九千四十，而复于太极上元"。

太初历的制定是以天文观测记录为依据的。《三统历谱》中所叙述历法的天文数据和运算推步的方法，都是合乎科学的。但是，前汉时期的士大夫，大都用经术来粉饰各种制度，刘歆为了支持王莽的托古改制，也特意利用《易经·系辞传》来解释太初历的天文数据，使之混入阴阳五行，八卦诸说。这样假借经传来穿凿附会，使天文科学染上一层神秘的色彩。

太初历何以采用八十一分法?《汉书·律历志》云："律容一龠，积八十一寸，则一日之分也。"是说取准标音律黄钟的律管长九寸，围九分，以围乘长，得容积八十一寸，即以八十一作为朔望月长度值的分母。这种说法纯粹是为了增加历法的神秘性而作

---

① 三统历推算交食在 6345 月后复起于朔旦冬至，而 6 345 月合 513 年。

的附会。落下闳、邓平历法的朔望月长度为 $29\frac{43}{81}=29.530\ 864$ 日，这个值与古四分历朔望月长 $29\frac{499}{940}=29.530\ 851$ 日非常接近而精度略差（精确值应为 29.530 588 日），古人何以要舍其精而取其粗？

其实，$\frac{43}{81}$这个值之求得有其科学依据。根据之一是在$\frac{499}{940}$的最佳渐近分数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{8}{15},\ \frac{9}{17},\ \frac{17}{32},\ \frac{26}{49},\ \frac{43}{81}$$

中，$\frac{43}{81}$恰是它的最密近之渐近分数；根据之二是$\frac{43}{81}$这个值与当时已知的交食周期 135 个朔望月相配合，可以得到较小之共同周期[①]。古历十九年七闰决定一章为 235 朔望月，三统历又测定交食周期为 135 个朔望月，它们二者之共同周期为 6 345 朔望月，合 513 年，称为一“会”。若取某年十一月甲子日夜半合朔冬至，而且日月合壁（即日全食的时刻）为理想历元，那么过了 513 年之后又会出现合朔、冬至、日月合壁。但这时刻不必正值夜半，这与朔望月的长度有关。若依四分历

$$1\text{会}=513\text{年}=6\ 345\text{月}=187\ 373\frac{1}{4}\text{日}$$

即必须经 4 会才回到夜半；如果日名亦要回到甲子日，那就必须经 80 会，即 41 040 年。一般地，设若朔望月长度取 $29\frac{y}{x}=\frac{29x+y}{x}$ 日，其中 $0<y<x$；x，y 为互质整数。经 p 会之日数为

$$6\ 345p\cdot\frac{29x+y}{x}=\frac{3^3\cdot5\cdot47\cdot p}{x}\ (29x+y),$$

① 关于这一论点是吕子方教授于“三统历历意及其数源”一文中所最先提出。见：中国科学技术史论文集（上册）. 成都：四川人民出版社. 1983

欲得整数必须使 x 整除 $3^3 \cdot 5 \cdot 47 \cdot p$；此外，为使数据简单和周期较小，$x$，$p$ 应取尽可能小的整数，同时为保持数据精度应取 $\frac{y}{x}$ 为 $\frac{499}{940}$ 之密近分数。显然在 $\frac{499}{940}$ 之最佳渐近分数列中，$\frac{43}{81}$ 最为理想[①]。此时，只须取 $p=3$，即得整日数 $29\times6345\times3+5\times47\times43=562\ 120$ 日；若取 $p=9$，则得 $1\ 686\ 360=28\ 106\times60$ 日。这即是《三统历》"经三会而交食复起于朔旦夜半冬至"，"经九会而交食复起于朔旦夜半冬至甲子日矣。"这自然是极为简便的。

《三统历》追求理想上元，力求使日月五星有最小之共同周期。木、金、土、火、水之大循环周期皆为其小周的 216 倍或 144 倍：

木星　1 728÷12=144

金星　3 456÷16=216

土星　4 320÷30=144

火星　13 824÷64=216

水星　9 216÷64=144

因而得到简单的五星会终之岁数 138 240。

五星之大循环周期乃由"一见日数"（或称"一终日数"）而定，即

$$五星会合周期=\frac{一见日数}{回归年长度}。$$

《后汉书・律历志》"四分历"记载："五星数之生也，各记于日，与周天度相约而为率"。《晋书・律历志》魏"景初历"记载："各以一终之日与一岁之日通分相约，终而率之。"表明汉魏之世历家皆由测定五星"一见日数"而推算五星与日之会合周期；《三统

---

① 二者之差仅为 0.000014 日；若取 $\frac{8}{15}$ 则与 $\frac{499}{940}$ 之差达 0.002482 日，且此时须经 20 会而交食复起于朔旦夜半冬至甲子日。

历》虽未有如此之明确记载，从其“五步”之记述来看亦当如此推算，后汉与魏晋历家当本于《三统》。

《三统历》“五步”记载五星“一见日数”与现今测定之数值相比较，两者相差甚微，可见于下表：

星　名	三统所载一见（复）日数	今测一见（复）日数
木　星	398.70……日/见	398.88……日/见
金　星	584.12……日/复	583.92……日/复
土　星	377.93……日/见	378.09……日/见
火　星	780.52……日/见	779.94……日/见
水　星	115.91……日/复	115.88……日/复

这样精密的得数决不可能是随便凭空杜撰得来，它必定是实际观测的结果，并且当时已有了相当先进的测天技术。

第二节　《三统历》中关于五星周期的观测记录

《三统历》之第三章为“五步”。所谓五步，就是实测五星，其记载乃当时实测数字加以整理后之结果。

《三统历》关于木星会合周期观测记录如下：

“木，晨始见，去日半次。顺，日行十一分度二，百二十一日。始留，二十五日而旋。逆，日行七分度一，八十四日。复留，二十四日三分而旋。复顺，日行十一分度二，百一十一日有百八十二万八千三百六十二分而伏。凡见三百六十五日有百八十二万八千三百六十五分，除逆，定行星三十度百六十六万一千二百八十六分。凡见一岁，行一次而后伏。日行不盈十一分度一。伏三十三日三百三十三万四千七百三十七分，行星三度百六十七万三千

四百五十一（一作“三”[1]）分。一见，三百九十八日五百一十六万三千一百二分，行星三十三度三百三十三万四千七百三十七分。通其率，故曰日行千七百二十八分度之百四十五。”

按此记录可列如下表：

	（木）星　行	日　行
顺	22°	121°
留	0°	25°
逆	−12°	84°
复留	0°	24°3′
复顺	20°1661286′	111°1828362′
伏	3°1673451′	33°3334737′
一见	33°3334737′	398°5163102′

这里 1°=7 308 711′[2]。于是，得

$$\text{木星日行度}=\frac{33°3334737'}{398°5163102'}=\frac{33\,\frac{3334737}{7308711}}{398\,\frac{5163102}{7308711}}$$

$$=\frac{244522200}{2914030080}=\frac{145}{1728}°$$

《三统历》称此演算为“通其率”，所得日行度（即“日平行率”）就是文中所载“日行千七百二十八分度之百四十五”[3]。由此可得

① 从下文计算可知，应为“一”。

② 中国古代分弧的方法，是以一日一度计算。但“度”以下之划“分”，则无定“法”。这里木星取一度为 7 308 711 分，即是“纪母”中所谓“见中法七百三十万八千七百一十一。”

③ 这表示，木星经 1 728 年运行 145 周天。它是我国古代恒星周期的特殊形式。

$$（木星）恒星周期=\frac{回归年长度}{日平行率}=\frac{365\frac{385}{1539}}{\frac{145}{1728}}$$

$$=4352.77\cdots\cdots 日/周。$$

木星与日会合周期为 $1-\frac{145}{1728}=\frac{1583}{1728}$，此即“纪母”所载，木星与日经 1 728 年会合 1 583 见。

《三统历》关于金星周期观测记录如下：

“金，晨始见，去日半次。逆，日行二分度一，六日。始留，八日而旋。始顺，日行四十六分度三十三，四十六日。顺，疾，日行一度九十二分度十五，百八十四日而伏。凡见二百四十四日，除逆，定行星二百四十四度。伏，日行一度九十二分度三十三有奇。伏八十三日，行星百一十三度四百三十六万五千二百二十分。凡晨见、伏三百二十七日，行星三百五十七度四百三十六万五千二百二十分。夕始见，去日半次。顺，日行一度九十二分度十五，百八十一日百七分日四十五。顺，迟，日行四十六分度三（一作“四”）[①]十三，四十六日。始留，七日百七分日六十二分而旋。逆，日行二（一作“三”）[②]分度一，六日而伏。凡见二百四十一日，除逆，定行星二百四十一度。伏，逆，日行八分度七有奇。伏十六（一作“六十”）[③]日百二十九万五千三百五十二分，行星十四度三百六万九千八百六十八分。一凡夕见伏，二百五十七日百二十九万五千三百五十二（一作“一”）[④]分，行星二百二十六度六百九十万七千四百六十九分。一复，五百八十四日百二十九万五千三百五十二分。行星亦如之，故曰日行一度。”

---

① 从下文计算可知，应为“三”。

② 从下文计算可知，应为“二”。

③ 从下文计算可知，应为“十六”。

④ 从下文计算可知，应为“二”。

按此记录可列如下表：

	（金）星　行	日　行
逆	$-3°$	6°
留	0°	8°
顺	33°	46°
顺疾	214°	184°
伏	113°4365220′	83°
顺	211°	181°4196076′
顺迟	33°	46°
留	0°	7°5781261′
逆	$-3°$	6°
伏逆	$-14°3069868′$	16°1295352′
一复	584°1295352′	584°1295352′

这里 1°＝9 977 337′。[①]此即金星一复为 $584\dfrac{1295352}{9977337}$ 日，金行 584°1295352′，故知金星日行度为“日行一度”。

金星是内行星，若 s 表示星与日会合周期，y 表示日周期，p 表示星的恒星周期，则有

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}-\frac{1}{y},$$

其周期若以年为单位，则（$y=1$）有

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{s}+1=\frac{365\dfrac{385}{1539}}{584\dfrac{1295352}{9977337}}+1$$

① 这里金星一度取 9 977 337 分，即“纪母”所载“见中日法九百九十七万七千三百三十七”。

$$=\frac{9472284120}{5828060160}=\frac{5617}{3456},$$

故 $p=\frac{3456}{5617}$年$=\frac{3456}{5617}\times\frac{562120}{1539}=224.729315$ 日，与今测金星恒星周期 224.70……日相近。

由$\frac{1}{s}=\frac{1}{p}-1=\frac{5617}{3456}-1=\frac{2161}{3456}$，即

$$s=\frac{3456}{2161},$$

也就是"纪母"所载，金星与日经 3456 年会合 2161 复，而复于原处。

《三统历》关于土星周期观测记录如下：

"土，晨始见，去日半次。顺，日行十五分度一，八十七日，始留，三十四日而旋。逆，日行八十一分度五，百一日。复留，三十三日八十六万二千四百五十五分而旋。复顺，日行十五分度一，八十五日而伏。凡见三百四十日八十六万二千四百五十五分，除逆，定(一多"余"字)[1] 行星五度四百四十七万三千九百三十分。伏，日行不盈十五分度三。(百)[2] 三十七日千七百一十七万一百七十分，行星七度八百七十三万六千五百七十分。一见，三百七十七日千八百三万二千六百二十五分，行星十二度千三百二十一万五百分。通其率，故曰日行四千三百二十分度之百四十五。"

按此记录可列如下表：

	(土) 星 行	日 行
顺	5°1542078′	87°
留	0°	33°
逆	－6°4521526′	101°

① 对照其余各节，此显为衍文当删。

② 钱大昕说"百"字衍。按"景祐"本无"百"字。

	（土）星　行	日　行
复留	0°	33°862455′
复顺	5°12850649′	85°
伏	7°8736570′	37°17170170′
一见	12°13210500′	377°18032625′

这里 1°=19 275 975′①。于是，得

$$土星日行度=\frac{12°13210500'}{377°18032625'}=\frac{12\frac{13210500}{19275975}}{377\frac{18032625}{19275975}}$$

$$=\frac{244522200}{7285075200}=\frac{145}{4320}。$$

这表示，土星经 4320 年运行 145 周天。土星为外行星，有

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{y}-\frac{1}{p},$$

若取年为单位（$y=1$），则

$$\frac{1}{s}=1-\frac{1}{p}=1-\frac{145}{4320}=\frac{4175}{4320}。$$

此即“纪母”所载，土星与日经 4 320 年会合 4 175 见，而复于原处。

《三统历》关于火星周期观测记录如下：

“火，晨始见，去日半次。顺，日行九十二分度五十三，二百七十六日，始留，十日而旋。逆，日行六十二分度十七，六十二日。复留，十日而旋。复顺，日行九十二分度五十三，二百七十六日而伏。凡见六百三十四日，除逆，定行星三百一度。伏，日

① 这里土星一度取 19 275 975 分，即“纪母”所载“见中日法千九百二十七万五千九百七十五”。

行不盈九十二分度七十三（分）[1]，伏百四十六日千五百六十八万九千七百分，行星百一十四度八百二十一万八千五分。一见，七百八十日千五百六十八万九千七百分，凡行星四百一十五度八百二十一万八千五分。通其率，故曰日行万三千八百二十四分度之七千三百五十五。”

按此记录可列如下表：

	（火）星　行	日　行
顺	159°	276°
留	0°	10°
逆	−17°	62°
复留	0°	10°
复顺	159°	276°
伏	114°8218005′	146°15689700′
一见	415°8218005′	780°15689700′

这里 1°＝29 867 373′[2]。于是，得

$$\text{火星日行度}=\frac{415°8218005'}{780°15689700'}=\frac{415\dfrac{8218005}{29867373}}{780\dfrac{15689700}{29867373}}$$

$$=\frac{12403177800}{22312240640}=\frac{7355}{13824}。$$

这表示，火星经 13 824 年运行 7 355 周天。火星为外行星，有

$$\frac{1}{s}=1-\frac{1}{p}=1-\frac{7355}{13824}=\frac{6469}{13824},$$

此即“纪母”所载，火星与日经 13 824 年会合 6 469 见，而复于

① 钱大昕说“分”字衍，当删。

② 这里火星一度取 29 867 373 分，即“纪母”所载“见中日法二千九百八十六万七千三百七十三”。

原处。

《三统历》关于水星周期观测记录如下：

"水，晨始见，去日半次。逆，日行二度，一日。始留，二日而旋。顺，日行七分度六，(一多"十"字)[1] 七日。顺，疾，日行一度三分度一，(一多"一"字)[2] 十八日而伏。凡见二十八日，除逆，定行星二十八度。伏，日行一度九分度七有奇，三十七日一亿二千二百二万九千六百五分，行星六十八度四千六百六十一万一百二十八分。凡晨见、伏，六十五日一亿二千二百二万九千六百五分，行星九十六度四千六百六十一万一百二十八分。夕始见，去日半次。顺，疾，日行一度三分度一，十六日二分日一。顺，迟，日行七分度六，七（一作"十"）[3] 日。留，一日二分日一而旋。逆，日行二度，一日而伏。凡见二十六日，除逆，定行星二十六度。伏，逆，日行十五分度四有奇，二十四日，行星六度五千八百六十六万二千八百二十分。凡夕见、伏，五十日，行星十九度七千五百四十一万九千四百七十七分。一复，百一十五日一亿二千二百二万九千六百五分。行星亦如之，故曰日行一度。"

按此记录可列如下表：

	（水）星　行	日　行
逆	－2°	1°
留	0°	2°
顺	6°	7°
顺疾	24°	18°
伏	68°46610128′	37°122029605′

① 从下文计算可知，"十"为衍字，当删。

② "一"为衍文，当删。

③ 从下文计算可知，应为"七"。

	（水）星　行	日　行
顺疾	22°	16°67041148.5′
顺迟	6°	7°
留	0°	1°67041148.5′
逆	−2°	1°
伏逆	−6°58662820′	24°
一复	115°122029605′	115°122029605′

这里 1°＝134 082 297′[①]。此即水星一复为 $115\ \frac{122029605}{134082297}$日，水行 115°122029605′，故知水星日行度为“日行一度”。

水星为内行星，其周期若以年为单位，则有

$$\frac{1}{s}=\frac{365\ \frac{385}{1539}}{115\ \frac{122029605}{134082297}}=\frac{48973580760}{15541493760}=\frac{29041}{9216},$$

即是“纪母”所载，水星与日经 9 216 年会合 29 041 复，而复于原处。

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{s}+1=\frac{29041}{9216}+1=\frac{38257}{9216},$$

故 $p=\frac{9216}{38257}$年$=\frac{9216}{38257}\times 365\ \frac{385}{1539}$日＝87.9877……日，与今测水星恒星周期 87.97……日甚为相近。

古代天文数据多得自实测或实录。五星会合周期可据周率（B）、日率（A）由回归年长度推算：即设若星经过 A 年，与日会合 B 次，则

① 这里水星一度取 134 082 297 分，即“纪母”所载“见中日法一亿三千四百八万二千二百九十七”。

$$星一见日数=\frac{A}{B}\times 回归年长度。$$

因而，有人认为五星会合周期得自对周率、日率的实录，即观察星与日于 A 年内会合 B 次。然而《三统历》中五星大循周期均在千七百年以上，汉代绝无如此长达千、万年以上的观察记录。《三统历》“五步”所载五星会合周期很可能得自实测。理由如下：

其一，我国早在先秦时期已有五星周期的测定。据《开元占经》记载，甘德曾测得木星、金星和水星的会合周期[①]；马王堆汉墓帛书《五星占》中的行星行度部分也记载有木星、土星和金星的会合周期[②]。这表明汉代确已具备实测五星会合周期的技术条件。

其二，《三统历》关于五星运行之顺、逆、留、伏的记述，与内、外行星之视运动的实际观测大体相符[③]，而“五步”所载之五星会合数据又与现代观测数字相当接近。这表明，“五步”之记述决不可能是凭空臆造出来的。

其三，据《后汉书·律历志·四分历》与《晋书·律历志·景初历》之记载，当时历家皆由测定五星“一见日数”而推算日行度；后汉与魏晋历家之推算方法当本于《三统历》。

然而，三统“五步”所载五星一见之数又绝非实测之原数，乃由实测数字加以整理后之结果。这可由以下几点证明：

一是，五星观测中，“度”之下划“分”各不相同，例如木星 $1°=7\ 308\ 711'$，火星 $1°=29\ 867\ 373'$，…，竟达 10^{-7}度以下，相当于时间测定已达$\frac{3}{1000}$秒 这在汉代是绝无可能的。

---

① 测得木星、金星和水星的会合周期分别为 400，587.25 和 126 日

② 所载木星、土星和金星的会合周期分别为 395.44，377 和 384.4 日。

③ 吕子方. “三统历历意及其数源”中有详细之图解说明。中国科学技术史论文集. 成都：四川人民出版社，1983

二是，“五步”记载观测之数据有明显的人为雕琢之痕迹。例如，木星“复留”，“二十四日三分而旋”。这“三分”为$\frac{3}{7308711}$日$\doteq$0.035秒，是不可能实测出来的，它完全是为了凑数而修正之结果。

三是，“五步”中全部数据之计算完全表现为精确的形式，所得数字十分整齐而简单，是经过约去巨大公因数而化简的结果。例如，五星会合周期计算中，分子、分母皆出现大于10^6的公因数，(木星日行度计算中分子、分母约去了公因数1 686 360)，这绝非偶然的巧合，乃是数据经人为调整的明证。

考察《三统历》中数据之推算，可以发现西汉历家已具备一种调整分数数据的非凡能力，使得给出的历法数据既保持相当高精度，又十分简单整齐。换句话说，汉代历家已掌握了分数的约简与近似的算法。

第三节 天算家的分数约简与近似算法——“通其率”术

“通其率”术在《三统历》“五步”中明文记载者有三处：木星、土星与火星之日行度推算。例如，关于木星之记载：

“一见，三百九十八日五百一十六万三千一百二分，行星三十三度三百三十三万四千七百三十七分。通其率，故曰日行千七百二十八分度之百四十五。”

按文意，这段话是说由木星1见＝398°5163102′，星行33°3334737′，经“通其率”而得日行度，即

$$\frac{33°3334737'}{398°5163102'}\xrightarrow{\text{“通其率”}}\frac{145}{1728}°$$

显然，“通其率”一词在这里是一种算法的称谓[①]。分析这一计算过程：

$$\frac{33°3334737'}{398°5163102'}=\frac{244522200'}{2914030080'}=\frac{145}{1728}。$$

其第一步是化“度”为“分”；其第二步是分数（或比率）的约化。前者是准备，后者是演算的目的与关键。所以，这里的“通其率”是指分数的约化演算。

中算家的分数算法发达甚早，远在秦汉时期便已成熟。其系统记述见于《九章算术》。“约分术”是其中的重要算法，它以分母、分子的“更相减损”为基础。中算家的分数概念，实质上是把分数看作由法与实（即母与子）组成的一对比率。约分的根据就在于比率中各数可以通约的基本性质。求最简分数，即是计算分母与分子中含最大公约数（古称“等数”）之倍数。计算这倍数有两种方法：

一是由“更相减损”求“等数”，然后用等数分别去除分母、分子，即所谓“等除法实”；

二是在“辗转相除”中求得部分“商”（即“其率”[②]），然后由部分商的换算而计算出分母、分子中含等数之倍数，此即所谓“通其率”算法。

设若对 a，b（$a>b$）辗转相除：

$a=q_1b+r_1$　　　　$b=q_2r_1+r_2$

$r_1=q_3r_2+r_3$　　　　$r_2=q_4r_3+r_4$

……　　　　$r_{n-2}=q_nr_{n-1}$。

这里 $a>b>r_1>r_2>\cdots r_{n-1}>0$；$a$，$b$ 有等数 $d=r_{n-1}$。

---

① “通其率”一词曾被用作泛指“通同约简”之术。例如，刘徽《九章算术》均输章“金箠术”注有云：“今此率，以四为母，故令母乘本为衰，通其率也。”

② “其率”之术见于《九章算术》，见：李继闵．其率术辨．中国数学史论文集（一）．济南：山东教育出版社，1985

中算除法，称为“实如法而一”，如

$a \div b = q_1 \cdots$余r_1，

意为用b为度量单位（“法”）去量a（“实”），得量数（“其率”）q_1，而不尽有余数r_1。辗转相除，犹如依次用不同的度量单位b，r_1，r_2，…，r_{n-1}来度量，得知a中含有q_1个b和一个r_1；b中含有q_2个r_1和一个r_2；r_1中含有q_3个r_2和一个r_3；……；r_{n-2}中含有q_n个r_{n-1}（即等数d）。约分的问题即是要由此推算出a与b中含有$d=r_{n-1}$的个数，这犹如复合单位中由高向低的换算，如同几石几斗换算为几升那样。这一过程类似于分数算法中的“通分内子”：

$b=b$	$a=q_1b+r_1$
$b=q_2r_1+r_2$	$a=q_1(q_2r_1+r_2)+r_1$ $=c_2r_1+q_1r_2$ $(c_2=q_1q_2+1)$
$b=q_2(q_3r_2+r_3)+r_2$ $=e_3r_2+q_2r_3$ $(e_3=q_2q_3+1)$	$a=c_2(q_3r_2+r_3)+q_1r_2$ $=c_3r_2+c_2r_3$ $(c_3=q_3c_2+q_1)$
$b=e_3(q_4r_3+r_4)+q_2r_3$ $=e_4r_3+e_3r_4$ $(e_4=q_4e_3+q_2)$	$a=c_3(q_4r_3+r_4)+c_2r_3$ $=c_4r_3+c_3r_4$ $(c_4=q_4c_3+c_2)$
…………	…………
$b=e_{n-1}(q_nr_{n-1})+e_{n-2}r_{n-1}$ $=e_nr_{n-1}$ $(e_n=q_ne_{n-1}+e_{n-2})$	$a=c_{n-1}(q_nr_{n-1})+c_{n-2}r_{n-1}$ $=c_nr_{n-1}$ $(c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2})$

这一换算过程实为一系列e_k，c_k的计算。中算家容易从反复多次的计算中归纳出下列递推关系：

记$c_1=q_1$，$c_2=q_2q_1+1$；$e_1=1$，$e_2=q_2$，则对于$k=3$，4，…n，有

$$c_k=q_kc_{k-1}+c_{k-2}, \qquad e_k=q_ke_{k-1}+e_{k-2}。$$

于是，由此得$\frac{b}{a}$的最简分数$\frac{e_n}{c_n}$，而这种施行于“其率”q_1，q_2，…，q_n上的递推演算，正与“通其率”一词的意义相合。

上述《三统历》“五步”中木星日行度，按“通其率”演算：

$e_k\downarrow$		2914030080	244522200	11	$c_k\downarrow$
1		2689744200	224285880		11
1	1	224285880	20236320	11	$11\times1+1=12$
$11\times1+1=12$		222599520	20236320		$11\times12+11=143$
$12\times12+1=145$	12	1686360	0		$12\times143+12=1728$

即得约分：$\frac{244522200}{2914030080}=\frac{145}{1728}$。

“通其率”术与通常算术中所载“约分术”不同之处，在于以其率之换算代替“等除法实”，即以乘法与加法来代替除法，一般说来运算要省便得多，对于天文历法中的巨大数字的演算尤其如此。上面的例中，若用约分术进行则需要 1 686 360 分别去除 2 914 030 080和 244 522 200，无疑在古代筹算中要繁难得多[①]。历家在分数约化中多用“通其率”是可以理解的。

值得注意的是，“通其率”的演算过程自然地给出分数$\frac{b}{a}$的一个近似分数系列：

$$\frac{e_1}{c_1},\ \frac{e_2}{c_2},\ \cdots,\ \frac{e_k}{c_k},\ \cdots,\ \frac{e_n}{c_n}=\frac{b}{a},$$

而且，由c_k，e_k的构造容易看出，它们恰是$\frac{b}{a}$的渐近分数[②]。古代

① 通常算术书中所举约分有关算例，数字都极为简单，故用“等除法实”。此外，“通其率”算法用文字表述不易，这大概是“通其率”算法不见载于古算书的原因。

② 参见华罗庚《数论导引》。

中算家虽然未必有最佳渐近分数的概念，然而用某一$\frac{e_k}{c_k}$近似地代替$\frac{b}{a}$的做法是极其自然的。它相当于在辗转相除过程中，若余数r_k相对于a，b很小时，便可将r_k当作0而略去，于是有$\frac{b}{a}\approx\frac{e_k}{c_k}$。

“通其率”术既是约分术，又是分数近似法。这两种功能是一致的，皆为简化分数并保持相当的精确度。这正适合历家处理数据的需要。

如前所论，《三统历》中的数据推算虽表现为精确计算的形式，实际上是实测数字经修改整理的结果。而这必然要采用分数近似法，“通其率”是极为有力的工具。例如，关于木星会合周期测算。古代历家凭肉眼窥天，以壶漏记时，从《后汉四分历》及《景初历》记载推知，当时记时是将1日分为100刻，1刻又分为10分，所记时间能精确到$\frac{1}{1000}$日。如果将日积月累之数据加以平均，则可精确到$\frac{1}{10000}$日。设想历家测得木星一见日数当与$398\frac{5163102}{7308711}$日相近，譬如取$398\frac{5163102}{7308711}\approx398\frac{7064}{10000}$日。于是

$$\text{木星会合周期}=\frac{\frac{562120}{1539}}{398\frac{7064}{10000}}=\frac{5621200000}{6136091496}。$$

按“通其率”计算：

$e_k\downarrow$					$c_k\downarrow$
		6136091496	5621200000	1	
1		5621200000	5148914960		1
10	10	514891496	472285040	1	11
11		472285040	468671016		12
131	11	42606456	3614024	11	143
1452		39754264	2852192		1585

1583	1	2852192	761832	3	1728
6201		2285496	566696		6769
7784	1	566696	195136	2	8497
21769		390272	176424		23763
29553	1	176424	18712	9	32260
287746		168408	16032		314103
605045	2	8016	2680	2	660466
1497836		5360	2656		1635035
2102881	1	2656	24	110	2295501
232814746		2640	16		254140145
234917627	1	16	8	2	256435646
702650000		16			767011437
		0			

所得精确值（最简分数）$\frac{e_{17}}{c_{17}}=\frac{702650000}{767011437}$仍很复杂，故《三统历》所定之木星会合周期乃$\frac{e_6}{c_6}=\frac{1583}{1728}$，其分母含有 12 为因子，合于木星以 12 为小周的要求。由此反求木星一见之数

$$（星）一见之数=\frac{岁实}{s}=\frac{\frac{562120}{1539}}{\frac{1583}{1728}}=\frac{971343360}{2436237}$$

$$=398\,\frac{1721034}{2436237}=398\,\frac{5163102}{7308711}\ （日）。$$

（其分母 7308711，乃所谓“见中日法”。这里分子分母皆扩大

3 倍，为的是使分母为 4617 倍数[①]。）《三统历》的编制者，正是根据这修正后的一见之数再来调整五星的观测记录，使之以完全精确的形式出现，而数字十分简单整齐。《三统历》历法数据的奇巧，正是其数学处理方法高超的表现。没有“通其率”术这一有力工具，这些历法数据是无法拼凑得出来的。

从纯算法的观点来看，“通其率”的演算程序与近代西方的连分数算法别无二致。但中算家的“通其率”发端于分数或比率的约化，并以比率概念为基础；而十六、七世纪欧洲的连分数算法，产生于开方无穷逼近方根的需要[②]，它以分数的特定表示形式为根据。东、西方数学家从各自不同的途径都获得了渐近分数算法，可谓“殊途同归”。不过中算家由于分数算法的早期发达，在这方面领先于欧洲 1600 多年！

“通其率”算法在中国古代历法演算中起着重要的作用。理论的分析表明，相传为南北朝时代何承天所创而为唐宋历家所习用的分数近似法——调日法，便是由“通其率”脱胎而出[③]。“通其率”算法是“求一术”的理论之“源”。秦九韶所记述的为历代天算家“颇用之”的“求一术”，其演算程度与“通其率”一致[④]。这种算法是历法中推算上元积年的基础，远在汉代历家治历时就不可避免地要用到了。

“通其率”算法，上有“更相减损”（辗转相除）之源，下有

---

① “见中日法”乃由“一中日数”换算而得：1 年＝12 中；1 中＝$\frac{140530}{4617}$日，于是推得星一见日数＝$\frac{1}{s}\times12\times\frac{140530}{4617}=\frac{12}{s}\times\frac{140530}{4617}$，故分母一般应为 4617 之整数倍。故五星之“见中日法”均含 4617 之倍数。

② M·克莱因. 古今数学思想. 中译本，第一册，295～297

③ 李继闵. 关于‘调日法’的数学原理. 西北大学学报（自然科学版），1985（2）

④ “大衍求一术”的演算程序相当于“通其率”中 c_k 的递推过程。

“调日法”、“求一术”之流，无疑它在中国古代天算史上占有重要的地位。

第三章　汉历法中的不定分析
——上元积年的推算

第一节　岁星纪年与超辰法

我国古代年、月、日的记法多采用“干支法”。以十天干和十二地支相配，组成60个不同的名称，从甲子始，至癸亥止。依次循环往复来记录年、月、日的名称。干支法早见于殷商甲骨文字，源远流长。尤其干支记日、记年延用至今。

殷商和西周时代还采用依王在位的年数来记年。春秋以来诸侯割据，各以本地区诸侯在位年数记年，使得全国各地纪年混乱。为了统一而便于对比，一种以天象为基础的记年法——岁星纪年得以流行。

岁星（即木星）是星空中一颗很明亮的行星，其恒星周期是11.86年。在古人看来，大约经十二年之后，木星又会在同一星空区域中见到。因此，古人就将天赤道带均匀地分成十二段。使冬至点正处于一分的正中间，这一分就叫星纪。然后由西往东依次是玄枵、娵訾、降娄、大梁、实沈、鹑首、鹑火、鹑尾、寿星、大火、析木。这就称为“十二次”。把每年木星所在的“次”记下来，就成为自然的记年资料。这就是岁星纪年法。

《汉书·律历志》载有十二次与二十八宿、二十四节气点距度间的关系：

星纪，初斗十二度，大雪。中牵牛初，冬至。终于婺女七度。

玄枵，初婺女八度，小寒。中危初，大寒。终于危十五度。

娵訾，初危十六度，立春。中营室十四度，惊蛰。终于奎四

度。

降娄，初奎五度，雨水。中娄四度，春分。终于胃六度。

大梁，初胃七度，谷雨。中昴八度，清明。终于毕十一度。

实沈，初毕十二度，立夏。中井初，小满。终于井十五度。

鹑首，初井十六度，芒种。中井三十一度，夏至。终于柳八度。

鹑火，初柳九度，小暑。中张三度，大暑。终于张十七度。

鹑尾，初张十八度，立秋。中翼十五度，处暑。终于轸十一度。

寿星，初轸十二度，白露。中角十度，秋分。终于氐四度。

大火，初氐五度，寒露。中房五度，霜降。终于尾九度。

析木，初尾十度，立冬。中箕七度，小雪。终于斗十一度。

角十二。亢九。氐十五。房五。心五。尾十八。箕十一。——东七十五度。

斗二十六。牛八。女十二。虚十。危十七。营室十六。壁九。——北九十八度。

奎十六。娄十二。胃十四。昴十一。毕十六。觜二。参九。——西八十度。

井三十三。鬼四。柳十五。星七。张十八。翼十八。轸十七。——南百一十二度。

根据《汉书·律历志》的记载，可以准确确定十二次于星空中的划分，以及二十四节气点的位置。(见图4·3·1与图4·3·2)。

岁星恒星周期小于12年，因此，经12年之后它就超过一周天。如此下去，过若干年后就会整整超过一次。这个现象古代称之为岁星超辰。

首先提出岁星超辰问题的是刘歆。他在《三统历》“岁术”中云：“推岁所在，置上元以来，外所求年，盈岁数除去之，不盈者

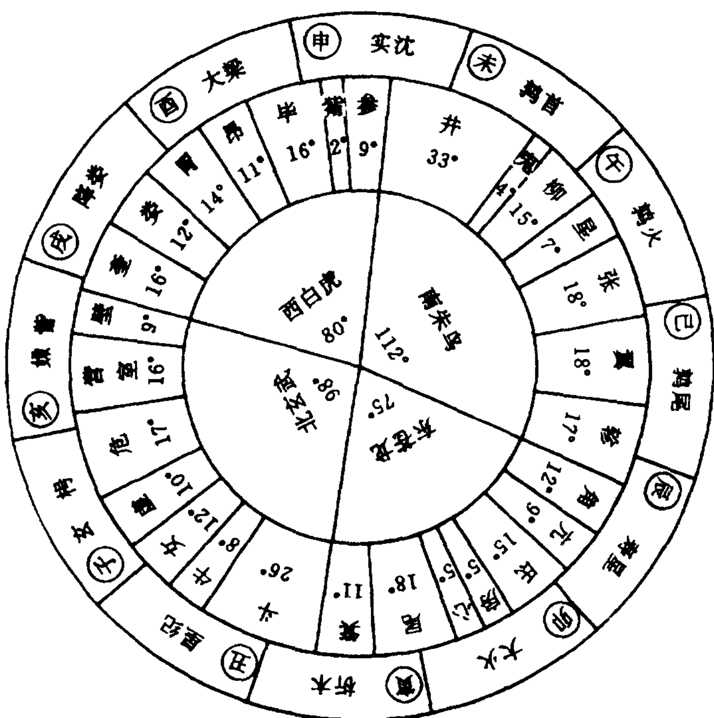


图 4・3・1　《汉书・律历志》中所载十二次与二十八宿

以百四十五乘之，以百四十四为法。”是说，推岁星所在次数的计算方法。设若已知上元以来积年为 N，要求该年岁星所在次数。是以岁数 1728 除积年数 N，余数为 R，则岁数所在次数为

$$岁次=\frac{145\times R}{144}。$$

这就是所谓“超辰法”：岁星 144 年超辰一次。

超辰法无疑得自对岁星恒星周期的测定。据《三统历》“五步”的观测推算，岁星之恒星周期为 $\frac{145}{1728}$（周天/年），则经 $N=$

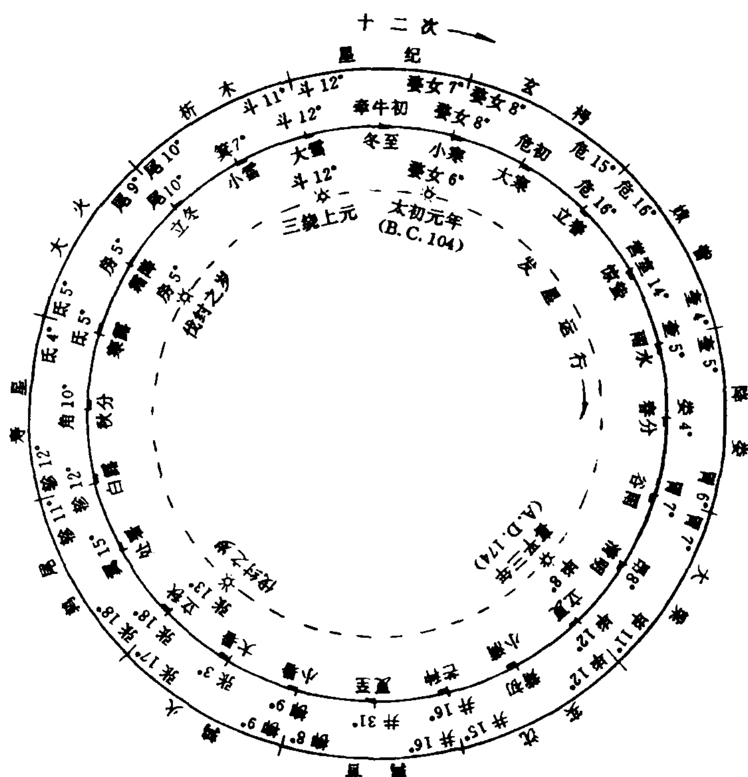


图 4·3·2　汉历历元计算中所涉及的岁星运行位置

$1728P+R$ 年（$0\leqslant R<1728$），木星行周天数为

$$\frac{145}{1728}N=145P+\frac{145R}{1728},$$

木星所在岁次即为

$$\frac{145R}{1728}\times 12=\frac{145R}{144}。$$

《三统历》创岁星纪年超辰之法，不但欲其行之当时，传之后世，且将证之往古。《三统历》之七“世经”，以星岁纪年纂附上

起唐尧元年，下竟东汉光武帝建武中元二年。[1]其所以要详著古代之纪年，是想藉以证实其历术之修明。换句话说，《三统历》对于古代纪年之纂次，都以其历术为本。

《三统历》岁星行次，见载于"世经"纪年中的有：伐桀之岁，岁在"大火"；伐纣之岁，岁在"鹑火"；前此十三年，文王受命，岁亦在"鹑火"；春秋鲁釐公五年岁在"大火"、后十二年釐十六岁岁在"寿星"、后八岁釐二十四年岁在"实沈"；襄公二十八年岁在"星纪"、三十年岁在"娵訾"、三十一年岁在"降娄"；昭公八年岁在"析木"、十年岁在"玄枵"、三十二年岁在"星纪"，盈一次；汉元年，岁在"鹑首"、武帝太初元年岁在"星纪"、光武帝建武元年岁在"鹑尾"。

《三统历》"世经"中有关上元积年与岁星行次之记载有五条：

其一，"三统，上元至伐桀之岁，十四万一千四百八十岁，岁在大火房五度。"

此岁星行次所在当由岁术推出：

$141\ 480 \equiv 1512\ (\mathrm{mod} 1728)$。

故岁星行次为：

$$\frac{1512 \times 145}{144} = 1522.5 \equiv 10.5\ (\mathrm{mod} 12)。$$

即岁星在第十一次之中，即大火房五度。

其二，"三统，上元至伐纣之岁，十四万二千一百九岁，岁在鹑火张十三度。"

此岁星行次所在亦当由岁术推出：

$142\ 109 \equiv 413\ (\mathrm{mod}\ 1728)$。

故岁星行次为：

$$\frac{413 \times 145}{144} = 415.868 \equiv 7.868\ (\mathrm{mod} 12)。$$

---

[1] "世经"自王莽以下之纪年，应出自班固之续纂。

即岁在第八次之 0.868 次，即在鹑火张十三度。

其三，“釐公五年，……是岁距上元十四万二千五百七十七岁，……是岁，岁在大火。”

此岁星行次若按岁术推算：

$142\,577 \equiv 881 \pmod{1728}$。

故岁星行次为：

$$\frac{881\times145}{144}=887.118\equiv11.118 \pmod{12}。$$

即岁星在第十二次，即岁在“析木”。这个结果与记载不符，相差 0.12 次。显然“世经”所载釐公五年岁星行次并非由岁术推出，而是据文献所载[1]。

其四，“汉（元年），距上元年[2] 十四万三千二十五岁，岁在大棣之东井二十二度，鹑首之六度也。”

按岁术推算：

$143\,025 \equiv 1\,329 \pmod{1728}$。

故岁星行次为：

$$\frac{1329\times145}{144}=1338.229\equiv6.229 \pmod{12}。$$

即岁星在第七次之 0.229 次，即在鹑首之东井 22 度[3]。

其五，“汉历太初元年，距上元十四万三千一百二十七岁。前十一月甲子朔旦冬至，岁在星纪婺女六度，故《汉志》曰岁名困敦，正月岁星出婺女。”

按岁术推算：

---

① “世经”云：“故传曰晋侯使寺人披伐蒲，重耳奔狄。董因曰：‘君之行，岁在大火’。”可见其“岁在大火”是据《左传》之记载。

② 《汉书》“考证”云：“按文不必有‘年’字，疑衍。”

③ 按 0.229（次）≐30×0.229（度）=6 度，鹑首初为井十六度，故鹑首六度即东井二十二度。

$143\ 127 \equiv 1\ 431 \pmod{1728}$。

故岁星行次为：

$$\frac{1431 \times 145}{144} = 1440.937 \equiv 0.937 \pmod{12}。$$

即岁星在第一次之 0.937 次，即在星纪婺女六度。

考察《三统历》关于上元积年与岁星所在之记载，刘歆旨在验证其岁术推得之结果与文献记载相符。其岁星行次皆以文献所载为据[①]。其中釐公五年“岁在大火”是据《左传》之记载而不顾岁术推算之结果明证。当然，所载岁星所在之星度可能是据岁术推算而补出的。

特别值得注意的是，关于太初元年岁星所在的记载。这段文字特别详细，除指出是岁“前十一月甲子朔旦冬至”这一特殊天象之外，还明文记述是时“岁在星纪婺女六度”，并说：“故汉志曰岁名困敦，正月岁星出婺女”，可证“婺女六度”是由当时实际观测而得的。

第二节　“通其率”算法与历法中的周期问题

古代历法的制定，不仅需要测定日、月、五星之运行周期，而且还需求出它们之某些共同周期。《三统历》中给出各种共同周期之数据。例如，一章 19 年是回归年与朔望月之共同周期；一统 1539 年是回归年、朔望月与日之共同周期；一元 4617 年是回归年、朔望月、日与甲子的共同周期；日月会岁 513 年是日、月与

① 这可见之于“世经”。其于“伐桀之岁”后，有文：“故传曰：‘大火，阏伯之星也，实纪商人。’”于“伐纣之岁”后，有文：“故传曰：‘岁在鹑火，则我有周之分壄也。’”于汉元年后，有文：“故汉志曰：‘岁在大棣，名曰敦牂，太岁在午。’”此皆为引证文献相对照。

交食之共同周期；五星会终之岁数 138 240 年乃五星之共同周期；……等等。

《汉书·律历志》卷上所载：“《三统》二千三百六十三万九千四十，而复于太极上元。”此 23 639 040 年是日、月、五星与甲子之共同周期。古人取冬至朔旦夜半甲子日、日月合璧、五星连珠为历法的起算点，称为“太极上元”；这里的 23 639 040 是七政与甲子的共同周期，它的推算相当于求 8 个数据的最小公倍数。从《三统历》的记载分析，它很可能是逐步求出的。例如，先求五星会终之数，再求它与一元之最小公倍数：

[138 240，4617] ＝23 639 040。

中国古代天算书中无求最小公倍数之明确记述。然而，历治推算中不可避免地大量出现求一些巨大数字的最小公倍数问题，天算家必定有计算最小公倍数之方法。其实，“通其率”算法可用于求最小公倍数。

例如，求 138 240 与 4 617 之最小公倍数，按“通其率”算法：

e_k ↓					c_k ↓
		138240	4617	29	
1		133893	4347		29
1	1	4347	270	16	29×1＋1＝30
16×1＋1＝17		4320	270		16×30＋29＝509
10×17＋1＝171	10	27	0		10×509＋30＝5120

于是得渐近分数：

$$\frac{1}{29},\ \frac{1}{30},\ \frac{17}{509},\ \frac{171}{5120}=\frac{4617}{138240},$$

故有：

[138 240，4 617] ＝171×138 240＝5 120×4 617
＝23 639 040。

天算家是很有可能从分数与其既约分数的比较中，发现最小

公倍数的算法的。这一算法比用最大公约数除二数之积：$\frac{138240\times4617}{27}$，无疑要简便得多。

求 a 与 b 的最小公倍数问题，实际上是一个特殊的一次同余问题：求整数 k（$<a$），使

$kb\equiv0\ (\mathrm{mod}\,a)$。　　　　（＊）

设若由“通其率”算法求得 $\frac{b}{a}$ 的渐近分数列：

$$\frac{e_1}{c_1},\ \frac{e_2}{c_2},\ \cdots,\ \frac{e_k}{c_k},\ \cdots,\ \frac{e_n}{c_n},$$

则由　　　$\frac{e_n}{c_n}=\frac{b}{a}$，即 $e_na=c_nb$

知　　　$c_nb\equiv0\ (\mathrm{mod}\,a)$。

故得一次同余式（＊）之解　$k=e_n$。

对于一般的一次同余问题：求整数 X（$<b$），使

$bX\equiv R\ (\mathrm{mod}\,a)$，　　　　（＊＊）

“通其率”算法亦成为求解的有效工具。它的一个重要性质，导致了中算史上著名的“求一术”的发现。

由于历法数据一般都是实测结果的近似值，因此分数近似法必然由于广泛的应用而得到深入的研究。古老的“其率术”中便已明确提出不足近似值（贱率）与过剩近似值（贵率）的概念[①]表明比较近似值的大小在中算史上由来已久。《九章算术》中的“课分术”[②]便是比较邻近分数大小的专门法则[③]。天算家使用“通其

① 李继闵．其率术辨．中国数学史论文集（一）．济南：山东教育出版社，1985

② 课分术曰：“母互乘子，以少减多，余为实，母相乘为法，实如法而一，即相多也。”

③ “课”，考核，检验之意；“课分”，即比较分数之大小。它与“减分”不同之处在于两分数值相近，预先不易判断孰大孰小。

率”术，首先需要考察渐近分数列$\frac{e_1}{c_1}$，$\frac{e_2}{c_2}$，…，$\frac{e_n}{c_n}$增减性状与误差程度；而用“课分术”求相邻二渐近分数的“相多”，就自然会引导出求一术的发现。

例如，《三统历》中关于木星会合周期的推算①，由通其率术获得一组渐近值：

$$\frac{1}{1}，\frac{10}{11}，\frac{11}{12}，\frac{131}{143}，\frac{1452}{1585}，\frac{1583}{1728}。$$

对相邻二数施以“课分术”之“母互乘子，以少减多”，便可发现“余实”皆为“一”：

$1\times11-1\times10=1$；

$11\times11-10\times12=1$；

$11\times143-12\times131=1$；

$143\times1452-131\times1585=1$；

$1452\times1728-1585\times1583=1$。

事实上，由$c_1=q_1$，$c_2=q_2q_1+1$；$e_1=1$，$e_2=q_2$，便有$e_1c_2-c_1e_2=(q_2q_1+1)-q_2q_1=1$。而由$e_{t-1}c_t-c_{t-1}e_t=e_{t-1}(q_tc_{t-1}+c_{t-2})-c_{t-1}(q_te_{t-1}+e_{t-2})=-(e_{t-2}c_{t-1}-c_{t-2}e_{t-1})$，按归纳法可知，

$$c_{t-1}e_t-e_{t-1}c_t=(-1)^{t+1}，(t=2，3，\cdots，n)。$$

此即二渐近分数$\frac{e_t}{c_t}$与$\frac{e_{t-1}}{c_{t-1}}$之差为$\frac{1}{c_{t-1}c_t}$。这个规律正是中算家得以建立“求一术”的关键。

所谓“求一术”，就是对于互素的二整数a和b，求一乘率（整数）k，使

$$kb\equiv1\ (\mathrm{mod}\ a)，$$

于是　$(kR)\,b\equiv R\ (\mathrm{mod}\ a)$，

即得$X=kR$是一次同余问题

---

① 见本编第二章第三节。

$$bX \equiv R \pmod{a}$$

的整解。

“通其率”术所获的渐近分数之性质：相邻二分数之差的分子为“一”，正好可以用来计算乘率。若$\frac{b}{a}$按通其率算法得渐近分数列

$$\frac{e_1}{c_1},\ \frac{e_2}{c_2},\ \cdots,\ \frac{e_{2s}}{c_{2s}},\ \frac{e_{2s+1}}{c_{2s+1}},$$

这里 $b=e_{2s+1}$，$a=c_{2s+1}$。于是由相邻二渐近分数之性质知，必有

$$c_{2s}b-e_{2s}a=c_{2s}e_{2s+1}-c_{2s+1}e_{2s}=(-1)^{2s+2}=1,$$

即

$$c_{2s}b \equiv 1 \pmod{a}。$$

这就由 c_k 的计算而求得乘率 $k=c_{2s}$。

南宋时代的数学家秦九韶在其数学巨著《数书九章》中记述了为历代历法家所颇用之“大衍求一术”，其演算程序即同于 c_k 之递推过程。这可视为古代天算家曾有通其率算法的一个明证。而汉代历法中上元积年之推算，更以通其率算法为基础。总之，通其率算法不仅是天算家简化分数数据的重要方法，亦是处理周期现象中一次同余问题的有力工具。

第三节　汉代历法中上元积年的推算

上元积年的推算是古历法中一重大的课题，在中国天算史上占有特别显要的地位。有的天文学史论著甚至认为“一部中国历法史，几乎可以说是上元的演算史。”①

进行历法的推算，必须有个起算点。这个起算点叫做历元或

① 陈遵妫. 中国天文学史（第三册）. 上海：上海人民出版社，1984. 1391

上元。而从上元至某给定年的累计年数，叫做上元积年。

古人治历，是以夜半为一日的开始，朔旦为一月的开始，冬至为一年的开始；所以规定从冬至到冬至为一岁，朔旦到朔旦为一月，夜半到夜半为一日。因此，一定要以甲子那天恰好是夜半朔旦冬至，作为起算的开始。古人于此历元之外，还要求日月合璧、五星连珠定为上元。这种追求理想上元之风，由来以久，《三统历》中所谓“太极上元”便表现这种明显的趋向。

从秦以前的古六历直到元代的《授时历》以前，上元积年的计算在我国经历了漫长的时期。有关古六历历元的资料流传下来的很少。《淮南子·天文训》只记载颛顼历历元之名为甲寅。后来《开元占经》所载古六历上元积年数字，一般认为是东汉人所追记的。因而，西汉以前历法上元积年推算已无从详考。

虽然自《乾象历》以后，各历家都列上元以来积年为历法第一条，但是历代各家历法都只给出上元积年的数据，而对计算的方法则从未加以叙述。后人只能根据文献记载中的线索，推测其计算的方法与过程。

关于汉历上元积年的计算，中外学者都有著述研讨。日本新城新藏考证《三统历》上元积年，归结为求解一个较为复杂的不定方程。[①] 李文林等考证《三统历》与《古四分历》上元积年的推算，认为它有赖于一次不定方程或一次同余式的求解。“至于说，汉代历算家在推上元积年时，究竟是解一个一次不定方程，还是解一个一次同余式，以及他们解这些方程时所用的具体方法是什么？这不能凭空臆断。”[②]其实，汉代历家采用“通其率”算法处理

① 见新城新藏《东洋天文学史研究》，第八编第七节，中华学艺社出版（中译本）．475～481

② 李文林等．论汉历上元积年的计算．科技史文集（第三辑），上海：上海科学技术出版社

上元积年计算问题是很自然的，下面将就几部历法的文献记载探讨其上元积年推算过程。

《三统历》上元积年的推算

《汉书·律历志》“世经”记载：“汉历太初元年，距上元十四万三千一百二十七岁。前十一月甲子朔旦冬至，岁在星纪婺女六度。”

汉历规定历元起于冬至、朔旦、甲子日夜半。《三统历》法利用已测得的太初元年前十一月甲子、朔旦、冬至会合的特殊天象来推算历元。按三统历法，年月日与甲子的最小公倍数（称为“元法”）为4 617年。故三统历元到太初元年的积年数 N 应是4 617的整倍数，即

$N=4\ 617\times p$，（p 为正整数）。

《三统历》之前，历法已普遍使用岁星纪年。刘歆对于岁星纪年尤为重视，并创起辰法而改进之。其“世经”中关于上元积年之记载中，明文指出“岁在星纪婺女六度”，表明《三统》历元当取岁星于行次之起始点，即星纪之初斗十二度。按“岁术”推算 $N=4\ 617p$ 年后岁星所在岁次应与婺女相符。

据《汉书·律历志》关于十二次与二十八宿距度之记载：“星纪初斗十二度，……，终于婺女七度。”推知星纪之次约计30°，故婺女六度当一次之$\frac{28}{30}$至$\frac{29}{30}$，将其化为以144为分母之分数，约为$\frac{135}{144}$次至$\frac{139}{144}$次。

而经 N 年后岁星所在岁次为：

$$4\ 617\times p\times\frac{145}{144}=12q+\frac{r}{144},$$

即

$$4\ 617\times 145p=1\ 728q+r。$$

此相当于一次同余式

$$4\,617\times145\times p\equiv r\pmod{1\,728},$$

据“岁在婺女六度”知，$135\leqslant r\leqslant139$。

对于如此巨大数字，且 r 仅给出取值范围的一次同余问题，是很难用试验的办法求得整解的。天算家自然要用他们所熟悉的通其率算法来处理：

$e_k\downarrow$					$c_k\downarrow$
		669465	1728	387	
$e_1=1$		668736	1458		$c_1=387$
$e_2=2$	2	729	270	2	$c_2=775$
$e_3=5$		540	189		$c_3=1937$
$e_4=7$	1	189	81	2	$c_4=2714$
$e_5=19$		162	81		$c_5=7361$
$e_6=64$	3	27	0		$c_6=24795$

由相邻二渐近分数（$\frac{e_6}{c_6}$与$\frac{e_5}{c_5}$）之“余实”为“一”知：

$$24\,795\times19-64\times7\,361=1,$$

用等数（669 465，1 728）＝27 乘之，得

$$669\,465\times19-1\,728\times7\,361=27。$$

故余数 r 应为 27 之整倍数，这只有 $r=27\times5=135$。于是，用 5 乘之，得

$$669\,465\times95-1\,728\times36\,805=135。$$

即有

$$669\,465\times95\equiv135\pmod{1728}。$$

又由通其率算法之性质知，[1]

$$[669\,465,\ 1\,728]=669\,465\times64=1\,728\times24\,795,$$

即　$669\,465\times64\equiv0\pmod{1728}$，

① 参见本章第二节。

故得

$$669\,465 \times (95-64) \equiv 0 \pmod{1728}。$$

这便得到满足条件之最小正整数 $p=95-64=31$，由此得三统历上元积年 $N=4\,617\times 31=143\,127$，合于《汉书·律历志》的记载。

《古四分历》上元积年之计算

《汉书·律历志》“世经”记载：“四分，上元至伐桀，十三万二千一百一十三岁，其八十八纪，甲子府首。”

上述古四分历上元积年数乃刘歆据周历所推，其计算方法当与三统历类似。查《四分历》年月日与甲子之循环周期为 1 520 年（称为“纪法”），于是，四分上元至太初元年之积年数 $N=1\,520p$（p 为正整数）。经 N 年后岁星所在岁次为：

$$1\,520\times p\times\frac{145}{144}=12q+\frac{r}{144},$$

即 $1\,520\times 145p=1\,728q+r$，

此相当于一次同余式

$$220\,400p\equiv r \pmod{1728},$$

其中 r 为与 135 相近之整数。

按通其率术演算如下：

$e_k\downarrow$					$c_k\downarrow$
		220400	1728	127	
1		219456	944		127
1	1	944	784	1	128
2		784	640		225
9	4	160	144	1	1148
11		144	144		1403
108	9	16	0		13775

于是有

$$13\,775\times 11-108\times 1\,403=1,$$

$$220\,400\times 11-1\,728\times 1\,403=16,$$

即

$$220\,400\times 11\equiv 16\pmod{1728}。$$

由上可知余数 r 应为 16 之整倍数。与 135 相邻近之 16 的整倍数有：

$$135-8\times 16=7;\qquad 9\times 16-135=9。$$

自然选取最相近之数为 $r=8\times 16=128$。即有

$$220\,400\times 88\equiv 128\pmod{1728}。$$

故得 $p=88$，即所谓"八十八纪"，而 $N=1\,520\times 88=133\,760$。考伐桀之岁至太初元年（据《汉书·律历志》"世经"所载）为 1 647 年，故四分上元至伐桀为 133 760－1 647＝132 113 年，与"世经"所述完全相符。

《东汉四分历》上元积年之计算

《后汉书·律历志》记载："从上元太岁在庚辰以来，尽熹平三年，岁在甲寅，积九千四百五十五岁。"

考东汉四分历，"仲纪之元起于孝文皇帝后元三年"，即公元前 161 年甲子、夜半、朔旦、冬至齐会。而四分历"纪法千五百二十"，故若设四分历元至汉文帝后元三年积年数为 N，则 $N=1520\times p$，（p 为正整数）。

p 值如何确定？汉代历家师弟相承，其算法当仿"三统"由岁星而定。查熹平三年当公元 174 年，距太初元年计 278 年。若按"三统"推算岁星行次，约在 4.868 次至 4.896 次之间[1]，即熹平三年岁星约在毕 8°。但据《后汉书·律历志》"贾逵论历"指出，

---

[1] 按三统"岁术"，熹平三年岁星行次为

$$T=\frac{145}{144}\times 278+\frac{r}{144},\qquad (135\leqslant r\leqslant 139),$$

即 $23\times 12+4.868\leqslant T\leqslant 23\times 12+4.896$，

故知岁星约在 4.868 次至 4.896 次之间。

东汉编䜣、李梵制四分历时，冬至点比三统所载前移五度左右(此冬至点在斗 $21\frac{1}{4}$度)[①]，约折合为 0.164 次。岁星“十二次”之起点亦应提前五度，即星纪之初当在斗 7°。由此推断，熹平三年实测岁星所在约为 5.032 次至 5.060 次之间。按东汉四分历，木星日行度为$\frac{398}{4725}$[②]，由此推算，熹平三年木星当在周天的$\frac{1981}{4725}$至$\frac{1992}{4725}$之间。

查文帝后元三年当公元前 161 年，距熹平三年 335 年，按四分历推岁星所在，得

$-28+\frac{951}{4725}\leqslant\frac{r_1-398\times 335}{4725}\leqslant-28+\frac{962}{4725}$，(因为 $1981\leqslant r_1\leqslant 1992$)，即文帝后元三年，岁星应在周天之$\frac{951}{4725}$至$\frac{962}{4725}$之间。

根据上述，N（$=1520p$）年岁星所行为周天之

$$1520p\times\frac{398}{4725}=\frac{604960p}{4725},$$

所得余数 r 应在 951 至 962 之间。这相当于一次同余式：

$604\,960p\equiv r\pmod{4725}$，其中 $951\leqslant r\leqslant 962$。

按通其率术推算：

① “贾逵论历”：“太初历冬至在牵牛初者，……案行事史官注，冬、夏至日常不及太初历五度，冬至日在斗二十一度四分度之一。”

② 《后汉书·律历志》：“木，……，通率日行四千七百二十五分之三百九十八。”

$e_k\downarrow$		604960	4725	128	$c_k\downarrow$
1		604800	4640		128
29	29	160	85	1	3713
30		85	75		3841
59	1	75	10	7	7554
443		70	10		76719
945	2	5	0		120992

于是，知

$$604\ 960\times945=4\ 725\times120\ 992,$$

$$604\ 960\times443-4\ 725\times56\ 719=5,$$

即
$$604\ 960\times443\equiv5\ (\mathrm{mod}\ 4725),$$

故余数 r 应为 5 之整倍数，自然取中值 $r=960$。由此得

$$604\ 960\times443\times192\equiv960\ (\mathrm{mod}\ 4725)。$$

而
$$443\times192=85\ 056\equiv6\ (\mathrm{mod}\ 945),$$

故

$$604\ 960\times6\equiv960\ (\mathrm{mod}\ 4725),$$

即得 $p=6$ 为所求之最小正整数。于是 $N=1\ 520\times6=9\ 120$，为历元至文帝后元三年之积年；9 120+335=9 455，恰为《后汉书》所载四分上元至熹平三年之积年数。

诚然，我们不能肯定汉代历家推算上元积年的具体步聚如前所述。但是，汉代历家在二、三百年的历元计算中创造了处理一次同余问题的数学方法是无可置疑的。而这一方法自然是后世所谓“大衍求一术”的前身。“通其率”术扮演这一角色是极为自然的。而且，“通其率”算法的深入探讨，还自然给出了一次同余问题的可解性条件，并在计算中通过对余数的调整，保证获得问题所需要的正整数解。这一切都在运算中自然而然地实现，仿佛无需专门讨论，这是中算“寓理于算”的特色的又一次体现。

第四章 秦、汉时期工程技术和律学中的数学

秦、汉时期是我国封建社会处于巩固和大发展的时期，我国的生产力水平有了很大的提高，科学技术得到了迅速发展。生产的发展和技术的进步有力地推动了数学的发展。同时，数学在多方面得到了应用，特别是在与数学关系密切的领域中得到了广泛的应用。工程技术与数学有着十分密切的关系。一方面，工程技术的发展离不开数学，在各种工程技术中存在着大量的测绘和计算问题，需要应用数学知识来解决，当时的工程技术人员必须熟悉某些数学方法和计算技能。另一方面，工程技术的发展对数学的发展起着促进作用。工程技术会给数学提出新的问题，不断给数学增添新的内容。工程技术人员在实践中也会发现和提出一些新的数学概念和方法，从而促进了数学的发展。乐器的制造是以音律学为基础，而作为数理音乐学的律学也是以数学为基础的。律学的产生和发展与数学的发展分不开。在秦、汉时期的工程技术和律学中包含有丰富的数学内容，通过研究工程技术和律学中应用的数学知识，不但可以了解当时数学的应用情况，而且有助于全面了解当时的数学发展水平。

第一节 工程技术中应用的数学知识

1. 制造工艺与建筑技术中的数学知识

秦、汉时期的制造技术与建筑技术都有了很大的发展，需要应用更多的数学知识，特别是需要应用大量的几何知识。

在秦、汉之际的遗物中有各种几何形状的技术制品，其中不少制品十分精制，非常规则。这些制品反映了当时的一些几何观念。在种类众多的铜器、铁器、陶器和漆器中，许多制品的外部形状、尺寸大小都是满足一定的几何要求的。各种制品的表面轮廓除平面外，还有柱面和各种旋转曲面等。有些制品的造型是值得注意的。如铜钫在西汉时期十分流行，流传到现在的有很多。这种器物具有一些几何特性（图4·4·1）。如果把它看成一种几何形体，用水平面去截它的不同部位，其截面都为正方形。而它的中部外表形状为柱面。如果用两个等径的圆柱垂直相交，保留其相贯部分，则得到一几何体。铜钫的中间部分正好是这种几何体的一部分。铜钫为铸件，在制造模具时必然要考虑到其外表曲面的形成问题，这就要产生正交相贯的观念。汉代制造了大量的钫，其中有铜器，也有漆器。因此，当时人们对钫的外表曲面形状是有一定认识的。钫是一种盛东西的器具，人们在设计和制造它时，对其容积的大小肯定也是有所考虑的。与钫相类似的外表形状，在汉代的实心砖室墓是由以前的砖筒拱发展起来的砖穹窿。[1] 这种砖墓的顶部外表形状与钫的外形曲面相类似。在工程技术中广泛应用这种形体，无疑为当时和以后的数学家提出了新问题，促使他们考虑和研究这类形体的几何特点。三国时期的大数学家刘徽对这样的几何体的性质有深刻的认识。他把由两等径圆柱正交相贯后保留下的几何体称为“牟合方盖”，并以它

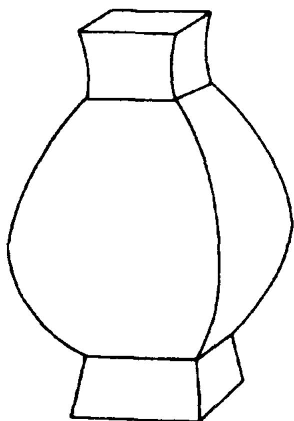


图4·4·1

① 刘敦桢主编．中国古代建筑史．北京：中国建筑工业出版社，1980．57～58

为辅助形体来研究球体积问题，取得了重要成果。

秦、汉时期的铁器制造技术有了很大的发展，一些铁器的制造需要用到几何知识。如汉代的铁蒺藜，设计的十分巧妙、合理，很好地利用了几何知识。它是由 4 个方位均称的锐刺组成，无论怎样放置，总有一个尖刺向上（图 4・4・2）[1]。这是一种十分先进的防御武器。它造型简单，但使用十分便利，巧妙地利用了 3 点具有稳定性的性质。它的 3 个锐刺的长度是相等的，即从刺尖到中心的距离都是相等的，而且任何两个锐刺的交角也都相等，为 120°。如果把 4 个刺尖看作 4 个点，那么其中任何 3 个点的连线都是一个等边三角形。如果把 4 个点连起来则可形成一个正四面体。[2]

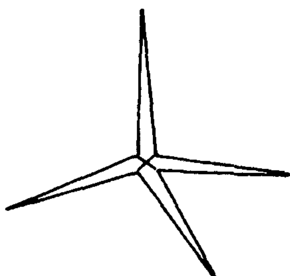


图 4・4・2

在铸造工艺技术中需要用到许多几何知识。秦、汉时期齿轮已经发明。汉代出土的铁齿轮齿形一致、分布均匀，制作时需要用到几何作图知识。铸造的铁齿轮，只有轮齿在圆周上均匀分布，才能互相衔接，保持连续传动。在设计和制造齿轮时必然要用到比较精确的等分圆周技术。汉代已发明指南车、记里鼓车和水力天文仪器等机械。这些机械的传动需要用齿轮系来实现。这就需要设计和制造不同规格的齿轮才能满足要求，因此，也就要根据齿数和周径的不同要求进行各种等分圆周工作。

秦、汉时期是我国铜镜发展的鼎盛时期。古镜以这一时期出土的数量最多。在铜镜的制造中要用到不少几何知识。当时的铜镜，一般为圆形，正面打磨光亮用来照人，背面铸有钮和各种纹

① 王仲殊．汉代考古学概说．北京：中华书局，1984．65～66

② 四川省博物馆藏有实物。

饰图案。各种镜上大都有精致的几何图案，如同心圆组、正方形、等腰三角形、菱形和圆弧形等都经常出现。在制造这些铜镜的过程中要用到多种几何作图方法。铜镜上的几何图形，用我国古代的规、矩、尺等测绘工具一般都能绘制。在几何图案的绘制中，技术要求较高的是等分圆周或等分弧的工作。在铜镜中有许多连弧纹镜要用到等分圆周的方法（图 4・4・3）。

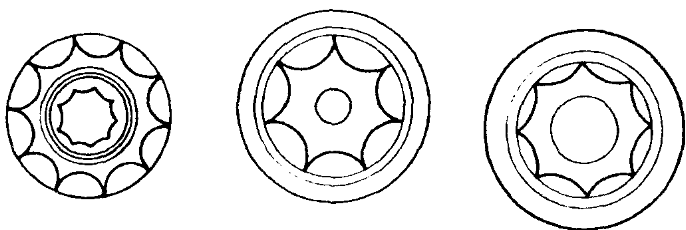


图 4・4・3

现在见到的铜镜涉及到 4，5，6，7，8，9，10，11，12，14，16，32，43，62…等分圆周[①]。从现在的数学理论看，7，9，11 等分圆周用直尺圆规是不能进行准确作图的，我国古代的规矩也不能准确地等分出来，只能近似地作出。5，10 等分圆周，现在用直尺、圆规准确作图也是比较困难的，古代恐怕也只能用近似方法完成。只要用近似方法画出 5，7，9，11…等分就可用等分角的方法进一步得到 10，14，18，22…等 2 倍数的等分。在流传下来的铜镜中，最常见的是 6，12，8 和 16 等分，特别是 8，16 等分最多。这大概是因为 6，12，8，16 等分能够用规、矩准确地作图，而且可以很容易地完成。

古代如何进行等分圆周，目前还没有见到较明确的记载。我们只能根据当时数学发展情况和有关史料进行一些推测。

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．44

5，7，9 等分圆周的方法大概是建立在一定的数学计算基础上的。《周髀》中记载了一种把圆周分为 $365\frac{1}{4}$ 度的方法。在一块平面上画一个直径 121.75 尺的圆，求得它的周长为 365.25 尺（这里所取圆周率为 3）。这样，按一尺等于一度的简单关系分圆周为 $365\frac{1}{4}$ 度。这是一种近似的方法。用与此相类似的方法也可进行 5，7，9 等分圆周，一般误差不是很大，能满足要求。用这种方法进行 5 等分圆周时，可以取圆周率为 3，近似地认为其等分的圆弧所对应的弦长为 $\frac{3}{5}\times 2R$（R 为圆的半径）。用矩尺在圆周上选取相距为 $\frac{6}{5}R$ 的点就可把该圆 5 等分。

用规和矩进行 4，6，8 等分圆周都很容易。4 等分圆周只要先画圆的一条直径，再使用矩，过圆心作该直径的垂线，画出另一条相垂直的直径就可实现。圆内接正六边形的每一边长与半径相等，其顶点把其外接圆圆周正好 6 等分。用矩尺作圆的内接正六边形就可把圆周 6 等分。也可用规取半径长度直接在圆周上截取 6 个等分点。在 4 等分圆周的基础上，使用矩可把圆周 8 等分。先用矩把一个直角等分，可作出一条直径。然后再使用两次矩，可作出另一条与其垂直的直径，这样用 4 条直径就把圆周 8 等分了（图 4·4·4）。

秦、汉时期的许多工艺技术中要用到等分圆周的方法，如制造车、齿轮和一些天文仪器都要进行等分圆周的工作。汉代铜镜上的连弧图案，经测量绝大多数都很准确。估计当时已有了二等分一已知弧的方法。实际上，只要能二等分一角，就可二等分其对应的弧。在先秦时，工程技术中就出现了二等分一些特殊角的方法。《考工记》上已给出不同角度的一些构件的专有名称，即“半矩谓之宣，一宣有半谓之欘，一欘有半谓之柯，一柯有半谓之磬。”为制造这些构件，显然要用到等分 90°，45°，67°30′和 101°15′

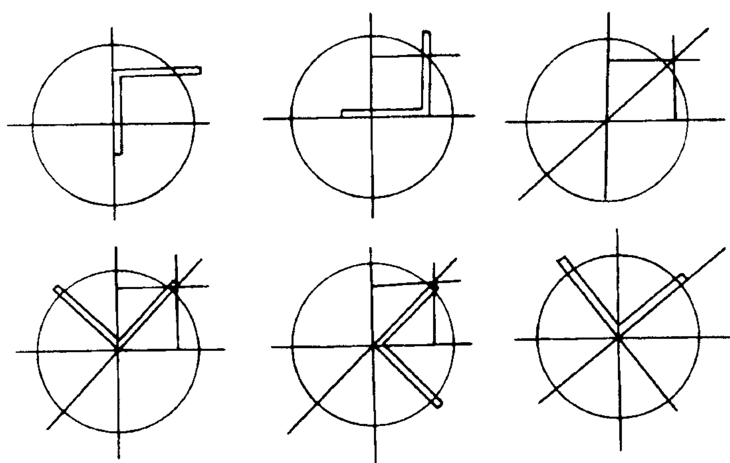


图 4・4・4

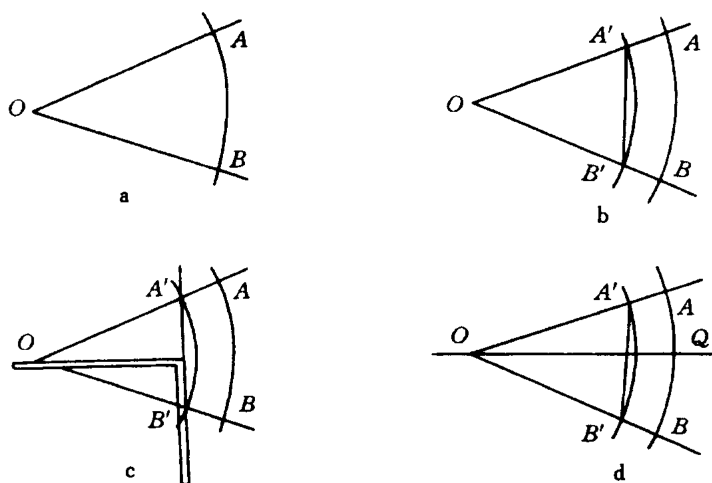


图 4・4・5

角的方法。秦、汉时期人们对规、矩的功用有了更深刻的了解和认识，当时应该有了二等分一角或一弧的一般方法。我们这里提出当时可能采用的方法。

假定$\angle AOB$和弧$\overset{\frown}{AB}$是已知的（图4·4·5a），用规矩将它们平分。取合适的半径，以O为圆心作弧$\overset{\frown}{A'B'}$（图4·4·5b），过A'，B'作弦$A'B'$，用矩过O点作$A'B'$的垂线（图4·4·5c），延长该垂线使它与$\overset{\frown}{AB}$相交，其交点Q即是$\overset{\frown}{AB}$的中点，OQ则是$\angle AOB$的平分线（图4·4·5d）。如尺寸许可的话，也可直接连接A，B两点，用矩过O点作AB的垂线就可把它们平分。

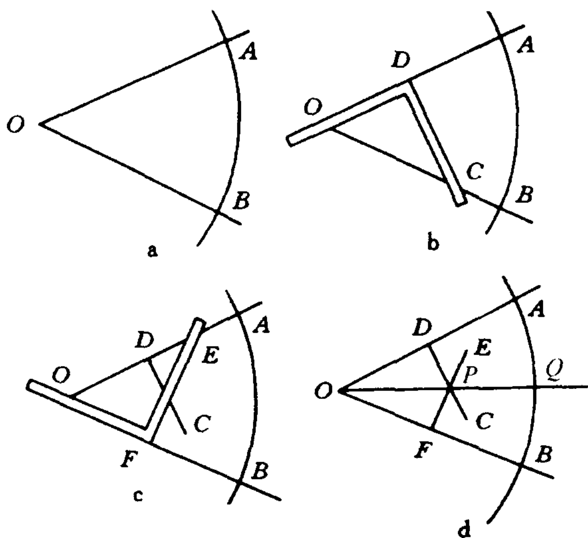


图4·4·6

其实，不用规只用矩也很容易就可把一已知角和已知弧平分。把矩的一边和$\angle AOB$的一条线对齐，沿另一边作OA的垂线DC（图4·4·6b），再把矩翻过来作OB的垂线FE，并使OF等于

OD（图 4・4・6c）。FE 与 DC 交于一点 P，连接 O，P，其延长线与 $\overset{\frown}{AB}$ 交于 Q，这样，OP 就是 $\angle AOB$ 的平分线，Q 点为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点（图 4・4・6d）。[①]。

在等分圆周的基础上很容易作出各种连弧形几何图案。只要选取适当长度的半径，以圆周上各等分点为圆心依次画弧，就可得到均匀的连弧图形。

在一些天文仪器的制造中也需要用到等分圆周技术。分别在内蒙托克括和洛阳金村出土的两件晷仪是我国流传于世的最早的一种天文仪器。它们都是秦、汉之际的遗物。这种仪器主要是用一块方形石板制成的。石板的表面平整，中央有一较大和较深的圆孔。表面上有 3 个同心圆，其中一个是不完全的圆周。在第一个圆到第二个圆之间刻有 69 条辐射直线纹。条纹与大圆相交处有 69 个小孔，孔之间的距离相等，共占去整个圆周 $\frac{2}{3}$ 多一点。小孔边上都标有数码，从 1 至 69 按顺时针方向排列。数码都是用秦、汉之际的小篆书写的。在第一个圆到第二个圆之间刻有一个正方形，过正方形的四角还刻有对角线的延长线，又把圆周平分为 4 等份和 8 等份（图 4・4・7）[②]。从小孔位置的分布看，仪器制造者显然是通过 100 等分圆周来确定小孔位置的。两件晷仪的表面图案相同，但洛阳金村出土的一件图案特别精制和规正，刻度比较精确。

在制造这种仪器时，首先需要划线作图。用古代的规矩把圆周 100 等分是一项难度比较大的工作。大概是用近似方法画出的。可能是先进行计算求得正 100 边形的近似边长，然后进行作图。在

---

① 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．46

② 李鉴澄．晷仪——现存我国最古老的天文仪器之一．科技史文集，第一辑，1978

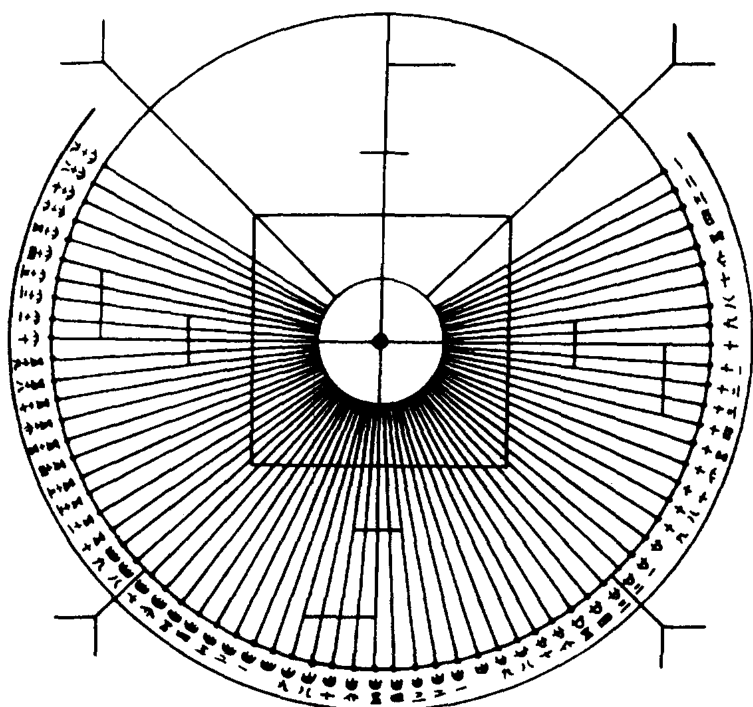


图 4・4・7

作图时为了控制误差，先 4 等分和 8 等分了圆周。4 等分点也是 100 等分点的组成部分，8 等分点在两个 100 等分点之间。

在建筑工程中也要用到不少数学知识。从秦到西汉，建筑技术得到了空前的发展，修建了规模巨大的宫殿、陵墓、万里长城、驰道和水利工程等。这些工程必然要用到不少数学知识。当时肯定已能计算一些常见的土方。例如进行修城、筑堤、开沟都需要计算体积的大小。一般最常见到的可能是正截面相等的梯形的楔形平截体的体积计算，因为当时的城墙、堤坝、渠道都是这种形状。如果剖截面的上、下广分别为 a，b，高或深为 h，工程的长为

l，其体积则为 $V=\frac{1}{2}(a+b)hl$。

在城市建筑的规划、设计中也要用到数学知识。西汉时期曾在长安城建造了十几个规模巨大的礼制建筑，从这些建筑的遗址看，每个建筑的平面都是沿着纵横两条轴线采用完全对称的布局方法，外面是方形围墙，每面辟门，而在四角配以曲尺形房屋。在围墙内，有方形夯土台，个别台上还留有若干柱础，不难推断原来台上的建筑也是完全对称的，形制是十分的严整。其中位于东端的遗址，外凿圆形水渠。这些建筑的布局方法是在沿着纵轴线组织的建筑群以外，自成一种体系[①]。规划和设计这些建筑时不但要用到不少几何知识，而且还要解决许多计算问题。

秦、汉时期建造了大量的粮仓，并建立起了完备的粮仓体制。修建粮仓一般要知道它的储粮量，因此需要计算粮仓的容积。

秦、汉时期的粮仓建筑，从其形状体态来看可分为圆形仓和方形仓两大类。圆形仓当时称为囷，种类形式较多，仓体有呈圆柱状和圆台状的，也有呈椭圆柱状的[②]。1977 年西安东郊汉墓出土的黄釉陶囷，其囷身为圆柱状（图 4・4・8a）[③]。洛阳汉墓出土的囷，其囷身基本上都呈圆柱状（图 4・4・8b）[④]。当时肯定已能计算这样形状的粮仓的体积了。广州南郊南石头西汉木椁墓出土

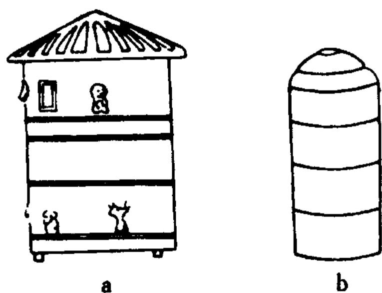


图 4・4・8

① 刘敦桢主编．中国古代建筑史．北京：中国建筑工业出版社，1980．42～47

② 杜葆仁．我国粮仓的起源和发展．农业考古，1984（2）：299～307

③ 傅嘉仪，王汉珍．西安文管会所藏的四件汉文物。考古与文物．1981（4）

④ 同②，304～307

的圆囷，上宽下窄，其囷身为圆台状。[1] 当时可能已经有计算这种粮仓容积的方法了。秦、汉时期的方形仓，仓身多为方柱形。建筑在地下的方形仓被称为窖。咸阳杨家湾汉墓出土了不少方形仓。[2] 甘肃武威雷台汉墓出土的二件黄釉仓，其仓身都为方柱状。秦、汉时期早已掌握了长方体的计算公式，求得这些方形仓的容积是不困难的。

2. 测绘技术中的数学

秦、汉时期，随着工程技术和天文学的发展，测绘技术有了很大的发展，当时的测绘术反映了很高的数学水平。

《淮南子》和“周髀”中都有不少测绘问题，其中的测量方法都是以一定的数学原理为基础的。“周髀”上载有立表测定方向的方法：“以日始出，立表而识其晷，日复识其晷，晷之两端相直者正东西也。中折指表者，正南北也。”这种方法是在一地平面上立一表 A，以立表点 A' 为中心画一个圆。记下日出和日落时表影与圆周相交的两点 B 和 B'，把它们连接起来，其连线的方向就是东西方向。平分 BB'，把中点 C 和 A' 连接起来，其方向为南北方向（图 4·4·9）。这里用到了圆和等腰三

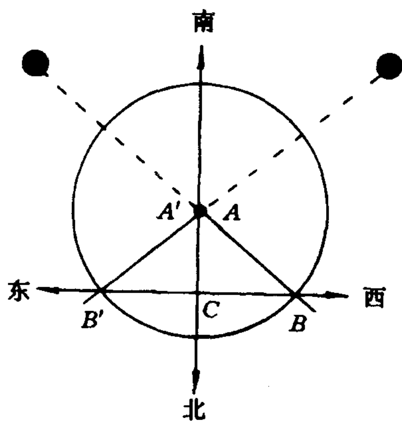


图 4·4·9

① 广州市文物管理委员会. 广州郊南石头西汉木椁墓清理简报. 文参. 1955 (8)

② 陕西省文管会、博物馆等. 咸阳杨家湾汉墓发掘简报. 文物. 1977 (10): 13

角形的性质及其平面对称的一些初步知识。

这种立表定向的方法早在秦、汉以前就已被使用，“周髀”只是给予了较明确的说明。在《淮南子・天文训》中也记载了一种测定方向的方法，其原理与上面一种基本相同，但在具体方法上有所改进。其方法是：“先树一表东方，操一表却去前表十步，以参望日始出北廉。则定东方两表之中与西方之表，则东西之正也。”即立一定表 A，在其西边 10 步远的地方立一可游动的表 B，日出时从 B 表处看，使表 A、表 B 和日面中心三点成一线；日落时再在 B 表东 10 步处立一表 C，使 C 表、B 表与日面中心在一条直线上。这样 CA 的中点 D 和 B 点的连线就是东西方向（图 4・4・10），其垂直方向为南北方向。

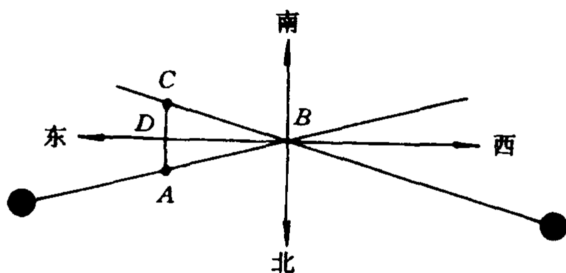


图 4・4・10

从上述关于立表定向的方法来看，当时已经运用了一些几何原理。如两点定一直线的原理、对顶角相等的原理和等腰三角形底边中垂线平分顶角的原理等。

秦、汉时期在实际测绘时已经广泛应用相似直角三角形对应边成比例的原理。《淮南子・天文训》中有用四表测东西南北广袤之数的方法，用到了这一原理。其测东西之数的方法是：“立四表，以方一里为距，先春分若秋分十余日，从距北表参望日始出及旦，以候相应，相应则此与日直也。辄以南表参望之，以入前表数为

法，除举广，除立表袤，以知此东西之数。假使视日出，人前表中一寸，是寸得一里也，一里积万八千寸，得从此东万八千里。”我们用图 4・4・11 加以说明：P 为太阳位置，A，B，C，D 为四表，相距各 1 里，即 $AB=BC=CD=DA$，由原文可知，计算 BP 的方法为：

$$BP=\frac{PC'\cdot CD}{DE}=\frac{BC\cdot CD}{DE}。$$

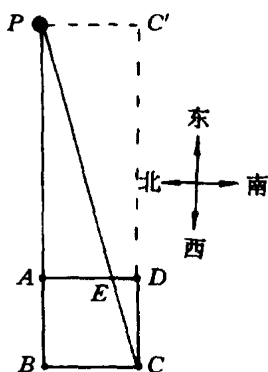


图 4・4・11

因△DCE 和△$C'CP$ 相似，很容易就可推出上面的结果。

《淮南子・天文训》中还有测算日高的方法：“南二万里则无景，是直日下也，阴二尺而得高一丈者。南一而高五也，则置从此南至日下里数，因而五之，为十万里，则天高也。若使景与表等，则高与远等。”当时认为大地是平的，并认为南 2 万里则无影。如图 4・4・12，设 P 为太阳位置，CB 为 1 丈长的表，其影 AB 为 2 尺，AQ 为 2 万里，则日高为：

$$PQ=\frac{BC}{AB}\cdot AQ=10\text{ 万里}。$$

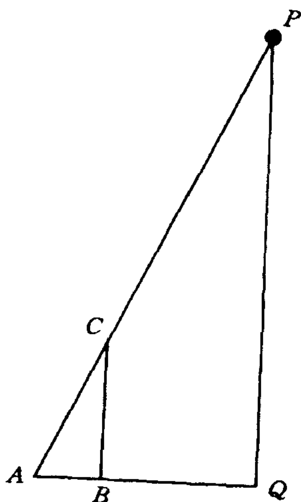


图 4・4・12

文中的“若使景与表相等，则高与远等”一句是指，如果 $AB=BC$，则 $PQ=AQ$。这里显然应用了相似直角三角形的性质。

《淮南子》的测量结果虽然是错误的，但所用的方法却是有实际意义的。在《九章算术》勾股章中，有一题讲立四表测量近距离物体远的方法，与《淮南子》测东西之数的方法完全相同。这种方法在当时的工程测量中肯定已经被应用了。

秦、汉时期绘图已应用于工程技术。早在战国时期我国就出现了采用正投影法制成的建筑平面图。秦始皇大兴土木，使制图技术有了新的进步。《史记·始皇本记》载有："秦每破诸侯，写放其宫建之咸阳北阪上"。就是把六国的一些宫室建筑画下来，然后在秦首都咸阳北面的坡地上照图样重建。汉武帝时曾在奉高建过一座明堂就是按照图样施工的。可见当时的建筑工程中已广泛应用了制图技术。

秦、汉时期中国的地图绘制技术已经达到了较高的水平。秦统一全国后由于各种土木工程和行政管理的需要，十分重视地图的绘制。当时地图已有方位、距离和比例尺的制定。汉代的地图绘制有了进一步的发展。长沙马王堆西汉墓出土的地形图、驻军图、城邑图绘制的比较准确，具有很高的水平。天文图的绘制在当时也很流行，《周髀》中的"日高图"、"七衡图"等都具有天文图的性质。

各种科学技术图的绘制必定是以一定的科学测绘方法为基础的。当时常把图形画在墙上或丝织物上，一般都需按一定的比例缩小，必须经过实测和一定的计算才行。对马王堆地形图与现代地图进行的对比测算表明，地形图除南部一带没有注记的部分外，其余部分的比例介于十七万二千分之一到十九万分之一之间，平均概数为十八万分之一。根据当时的度量制度进行折算，1 里为 300 步，可折合为 1 800 尺或 18 000 寸，所以十八万之一是一个比较合理的整数比例。[1] 马王堆地图的精度相当高，表明当时必定有

---

① 金应春，丘富科．中国地图史话．北京：科学出版社，1984．37

了一定的测量、计算方法和制图原则。如在测绘过程中，需要对具体地段各临近地物间的距离、方位、高下等要素作实地的测量和计算，然后求出两远方地物的水平距离，在此基础上按照一定的比例尺进行绘图。

天文图和工程图的绘制也要用到比例尺的概念。《周髀》中记载了绘制“七衡图”所用的比例：“凡为此图，以丈为尺，以尺为寸，以寸为分。分为一千里，凡用缯方八尺一寸；今用缯方四尺五分，分为二千里。”这里讲到了两种比例，一种是“分为一千里”，就是1000里的距离在绘图时要用1分长来表示，可计算得其比例尺为$\frac{1}{1000\times300\times6\times10}=1:18\ 000\ 000$；另一种是“分为二千里”，即比例为1∶36 000 000。比例尺的应用是以数学上的“比率”概念和算法为理论基础的。比例尺在各种制图中的应用，不仅说明了数学上的比率算法在制图技术上已被广泛应用，而且也说明当时人们对相似概念已有了较清楚的认识。

第二节　度量衡器具研制所用到的数学

我们的祖先为了生产和交换的需要，创造了各种用途不同的计量工具，确定了适当的度量衡单位和标准，产生了统一的计量方法。度量衡和数学有着密切的关系。无论是度量衡标准的制定，还是度量衡器具的研制都离不开数学。度量衡水平的高低也反映着数学水平的高低。秦、汉时期是我国度量衡发展的重要时期。秦始皇统一了全国的度量衡，规定使用标准量器。西汉沿用秦代的度量衡，到王莽变法时又重新制定度量衡，研制了许多度量衡器具。秦、汉时期的度量衡器具有许多流传到了现在，为数学史的研究提供了重要的资料。

现存的古代标准量器“商鞅量”是商鞅变法时制造的，但根据铭文可知它曾在商鞅时和秦始皇时两次作为标准器使用。铭文载有“积十六尊五分尊一为升。”[①] 这里“尊”就是寸，因此有 1 升 $=16\frac{1}{5}$（立方）寸。这里不但用到了分数概念，而且也涉及到了体积计算问题。这一量器内呈长方体状，因此在制造时一定用到了长方形体的容积计算公式。在上海博物馆还藏有秦始皇时制造的铜方升，与商鞅铜升器形相同，用现代方法精确测定，比商鞅铜方升容积大 6.7%。[②] 在中国历史博物馆也藏有一个秦始皇诏铜方升，较商鞅铜升扁而略长，经测算比商鞅量大 3.9%，说明当时的计算和制造精度都是比较高的。[③] 秦代已经规定了量器的允许误差范围，云梦睡虎地秦简《效律》规定升的误差范围是“二十分升一”，即为升的 50%，可见秦代在度量衡研制中已运用了十分科学的方法。

在甘肃武威磨嘴子汉墓中出土的一件木斗，口大底小，呈规则的四棱台状[④]。它的容积计算公式较为复杂，即 $V=\frac{1}{3}h\ (a^2+ab+b^2)$（其中 h 为深，a，b 为上、下底边的长，V 为容积）。在制造这一容器的过程中，肯定要遇到容积计算问题，当时应该有了容积的计算方法[⑤]。

在内蒙古集宁二兰虎沟西汉墓出土的一件小铜量，内呈圆柱状，经测定容 18 毫升。[⑥] 云梦秦简《传食律》规定：上造以下到官佐等，食“盐廿二分升二”。按秦、汉容量每升约 200 毫升折算，

① 国家计量总局等．中国古代度量衡图集．北京：文物出版社，1984．44

②③ 同①．58～59

④ 黄河水库考古工作队．1956 年河南陕县刘家渠汉唐墓葬发掘简报．考古通讯，1957（4）

⑤ 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984．47

⑥ 中国古代度量衡图集．78～79

“二十二分升二”为今18毫升，与这一容器容积相合。在制造这一容器时显然要进行一定的计算。在陕西咸阳黄家沟出土的3件小铜量，口大底小，呈圆台状。[①] 当时可能已有了容积计算方法，否则量器就不能制造得精确和符合要求。

西汉末年，王莽当权后，命刘歆修订度量衡制。当时制造和颁发了一批度量衡标准器，这批器具制作的十分精致，反映了当时度量衡器制造和校量技术的水平。其中特别值得研究和讨论的是王莽律嘉量。据王国维考证，当时曾造百余件这种量器颁行天下。[②] 现存的王莽铜斛有两件，一件很完整，藏于台湾；一件有残损，藏于中国历史博物馆。

现存的王莽铜斛是斛、斗、升、合、龠五量合为一器的量器。它的中间为大的圆筒形体，近下端处有底，底上为斛量，底下为斗量。左右两边各有一耳，都呈圆筒形，左耳为升量，右耳底上为合量，底下为龠量（图4·4·13）。

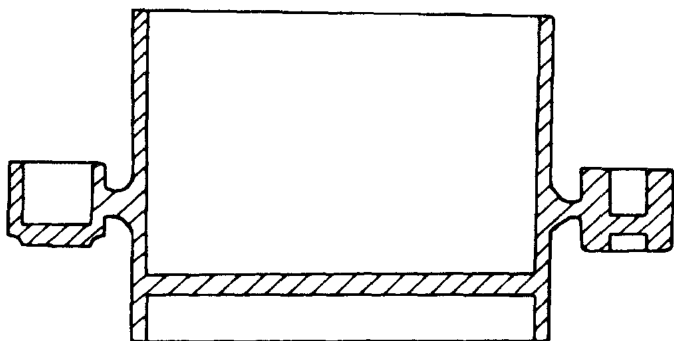


图4·4·13　嘉量斛结构示意图

① 中国古代度量衡图集. 78～79

② 王国维. 莽量考. 学衡，1926（58）：1～5

王莽嘉量刻有总铭文 81 字。此外，五量也都有铭文，记述了各量的尺寸。

斛铭为："律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九氂五毫，冥百六十二寸，深尺，积千六百二十寸，容十斗。"①

斗铭为："律嘉量斗，方尺而圜其外，庣旁九氂五毫，冥百六十二寸，深寸，积百六十二寸，容十升。"②

升铭为："律嘉量升，方二寸而圜其外，庣旁一氂九毫，冥六百四十八分，深二寸五分，积万六千二百分，容十合。"③

合铭为："律嘉量合，方寸而圜其外，庣旁九毫，冥百六十二分，深寸，积千六百二十分，容二龠。"④

龠铭为："律嘉量龠，方寸而圜其外，庣旁九毫，冥百六十二分，深五分，积八百一十分，容如黄钟。"⑤

铭文所记载的 5 个单位龠、合、升、斗、斛，除 1 龠等于半合外，其余都是十进位。根据"黄钟之龠"的说法，1 龠容 1200 粒中等长度的黍，体积为 810 立方分，可推算出合、升、斗、斛的体积分别为 1 620 立方分、16 200 立方分、162 立方寸和 1 620 立方寸。

斛名中的"方尺而圜其外"是指边长 1 尺的正方形的外接圆，而"庣旁九氂五毫"是针对外接圆而言的。"氂"即厘，"庣旁九氂五毫"指离外接圆处处为 9 厘 5 毫，即外接圆外一与其直径之差为 9 厘 5 毫的同心圆（图 4. 4. 14）⑥。《考工记》记载的"深一尺，内方一尺而圆其外"没有庣旁。根据文献考证，晚周的尺度与秦代和王莽时的尺度基本相同。⑦《考工记》中 1 鬴的体积小于 1 620 立方寸，即不够 10 斗。为了使斛达到标准值，必然要出现

①②③④⑤　中国古代度量衡图集. 80

⑥　白尚恕. 从王莽量器到刘歆圆率. 北京师范大学学报（自然科学版）. 1982 (2)

⑦　吴南薰. 律学会通. 北京：科学出版社. 1964. 349

庣旁。在律嘉量的设计和制造中要涉及到不少计算问题。在确定庣旁时要用到圆周率，用古代的周三径一之率显然是不能满足要求的。刘歆在推算时应该应用了新的圆周率。根据铭文记载可以得到下面的等式：

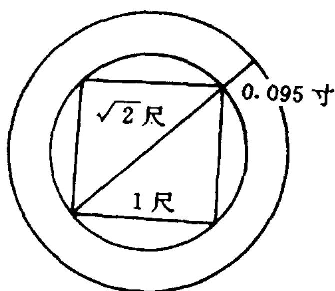


图 4・4・14

$$\pi(\frac{10\sqrt{2}}{2}+0.095)^2=162(\text{平方寸})。$$

由此可反求出圆周率 π 值为 3.1547。取 π 值为 3.1547 可求得庣旁为 0.0949。取 π 值为 3.154 可求得庣旁为 0.0957。

在斛的尺寸规格确定下来后，适当地选择各量的深度，则其它尺寸规格就可通过一定的计算确定下来。

因 1 斗 $=\frac{1}{10}$ 斛，要使斗深 1 寸，即为斛深的 $\frac{1}{10}$，则斗底面积与斛底面积应相同，于是斗铭有："方尺而圜其外，庣旁九氂五毫。"

因 1 升 $=\frac{1}{100}$ 斛，欲使升深二寸五分，即为斛深的 $\frac{1}{4}$，则升底面积应是斛底面积的 $\frac{1}{25}$，即：

$$\frac{\text{升底面积}}{\text{斛底面积}}=\frac{(\text{升半径})^2}{(5\sqrt{2}+0.095)^2}=\frac{1}{25},$$

则有：升半径 $=\sqrt{2}+0.019$。

因此，升铭为："方二寸而圜其外，庣旁一氂九毫。"

因 1 合 $=\frac{1}{1000}$ 斛，若使合深为 1 寸，即为斛深的 $\frac{1}{10}$，则合底面积应是斛底面积的 $\frac{1}{100}$，即：

$$\frac{\text{合底面积}}{\text{斛底面积}}=\frac{(\text{合半径})^2}{(5\sqrt{2}+0.095)^2}=\frac{1}{100},$$

$$\text{合半径}=\frac{\sqrt{2}}{2}+0.0095\doteq\frac{\sqrt{2}}{2}+0.009。$$

因此，与合铭文："方寸而圜其外，庣旁九毫"相合。

又 1 龠$=\frac{1}{2}$合，欲使龠深为 5 分，即合深的$\frac{1}{2}$，则龠底面积与合底面积应相同，可知：

$$\text{龠半径}=\text{合半径}\doteq\frac{\sqrt{2}}{2}+0.009。$$

于是有龠铭"方寸而圜其外，庣旁九毫。"

据《汉书·律历志》所记，汉代所用的度量单位为引、丈、尺、寸、分，这是一般情况下使用的单位，都是十进位制。在比较精密的计量和计算中，还要用到更小的单位，厘和毫。即《汉书·律历志》所说的"度长短者不失毫厘。"毫以下的单位在当时还没见使用。到刘徽时才使用了毫以下的秒、忽两个单位。在上面推算合和龠的庣旁时，略去了毫以下的单位，符合当时的情况，但因此由合、龠的数据反推出的圆周率 3.1591 与斛、斗、升推出的圆周率 3.1547 是不相同的。这不能说明在研制律嘉量时使用了不同的圆周率。

除了上面讨论的律嘉量外，王莽时期还制造了许多其他量器，流传至今的有铜圆升、铜方斗、铜圆龠、铜圆撮及漯仓平斛。其中铜圆升、铜方升、铜圆龠和铜圆撮上的铭文都有具体尺寸的记载，所以容积的大小和推算方法可以搞的比较清楚。

铜圆升现藏于日本。其铭文载有："律量升、方二寸二分而圜其外，庣旁四氂八毫，冥八寸一分，深二寸，积万六千二百分，容

十合。”容庚《海外吉全图录》著录。[①] 这一量器的尺寸，肯定也是借助一定的计算确定的。因 1 升为$\frac{1}{100}$斛，欲使圆升的深为 2 寸，即为斛深的$\frac{1}{5}$，则铜圆升底面积应是嘉量斛底面积的$\frac{1}{20}$，即有：

$$\frac{\text{铜圆升底面积}}{\text{嘉量斛底面积}}=\frac{(\text{铜升半径})^2}{(5\sqrt{2}+0.095)^2}=\frac{1}{20},$$

$$\text{铜圆升半径}=\frac{5\sqrt{2}+0.095}{\sqrt{20}}=1.602。$$

因$\frac{5}{\sqrt{20}}=1.118\doteq1.1$，则取“方二寸二分而圜其外”。边长为 2 寸 2 分的正方形对角线的一半为$\frac{1}{2}\times2.2\sqrt{2}=1.1\sqrt{2}\doteq$ 1.555。可推得庣旁为：

$$1.602-1.555=0.047。$$

这样推算得到的庣旁与铭文记载的“四氂八毫”略有出入。由于铜升的深选为 2 寸，则不能求得与斛的庣旁成整数比的庣旁，使计算复杂化。“四氂八毫”可能是经实验校正后的值。但也不能排除在设计这一量器时用到了另一个圆周率。由铭文的记载有：

$$\pi\left(\frac{1}{2}\times2.2\sqrt{2}+0.048\right)^2=8.1\ (\text{平方寸})。$$

这里可逆推出一个 π 值为 3.1497。

现藏于中国历史博物馆的铜方斗，内呈方柱状，其铭文载有：“方六寸，深四寸五分，积百六十二寸，容十升。”[②] 这一量器尺寸的确定显然用到了方柱形的体积计算公式。

1956 年在河南刘家渠出土的建国元年一件铜撮，上有铭文为：“律撮，方五分而圆其外，庣旁四毫，冥卌分五氂，深四分，

---

① 中国古代度量衡图集. 84

② 中国古代度量衡图集. 84

积百六十二分，容四圭。"[①]因1撮＝＝$\frac{1}{1000}$斛，如撮深为四分，即斛深的$\frac{1}{25}$，则撮底面积应是斛底面积的$\frac{1}{400}$，由比例式：

$$\frac{\text{铜撮底面积}}{\text{铜斛底面积}}=\frac{(\text{铜撮半径})^2}{(5\sqrt{2}+0.095)^2}=\frac{1}{400},$$

$$\text{铜撮半径}=\frac{1}{4}\sqrt{2}+0.00475\doteq\frac{1}{4}\sqrt{2}+0.004。$$

推算的结果与记载一致。在推算中舍去了毫以下的单位，这样从铭文逆推回去将得到又一不同值的圆周率，但这不意味着当时使用了这一圆周率值。

现藏于咸阳市博物馆的铜圆龠，根据铭文记载可知，其尺寸与前面讨论的律嘉量龠完全相同。

根据上面的一系列推算结果，我们认为，在王莽时期的量器设计和制造中，使用了比较统一的计算方法。在设计计算时，刘歆可能主要以嘉量斛的尺寸为标准，严格按照斛、斗、升、合、龠、撮的进位关系，通过比例推算来确定各种量器的规格。这种设计计算方法是比较科学的。刘歆在计算时，最小单位是毫。在近似数的截取上，他大概是采用了去尾法，即取以毫为单位的名数进行计算，把计算所得的数保留到整数，舍去毫以下单位的数。

在王莽时期制造的度量衡器物中，还有一种测量工具很值得研究，这就是当时用青铜材料制造的卡尺。它的构造原理与现代的游标卡尺基本相同，由固定尺、固定卡爪、滑动尺、滑动卡爪等部分组成。它的结构如图4·4·15所示，在固定尺中间有一导槽，导槽左侧有寸分刻度，滑动尺身上有寸刻度。卡尺有一组合套，在固定尺的下端，滑动尺穿过组合套可以来回滑动。在清末

---

① 黄河水库考古工作队．1956年河南陕县刘家渠汉墓发掘报报．考古通讯，1957(4)

前后，曾收集到5件王莽卡尺，但后来大都散失了，只有中国历史博物馆现在保存着一件完整的王莽卡尺。[①]

这件卡尺可以用来测量工件或器物的长度、宽度、深度等，也可用来测量圆柱形物件的外径。它的使用方法可能与现代的游表卡尺相类似，使用起来是很方便的。

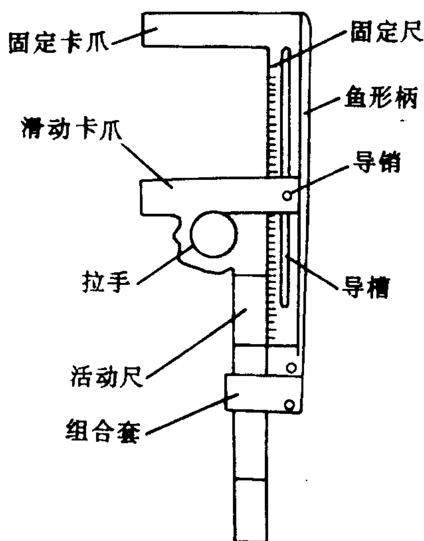


图4·4·15

在卡尺的设计中，必然要涉及到一些几何问题和计算问题。它的设计和制造肯定是以一定的数学原理和计算为基础的。例如考虑长度的测量时，必然要涉及到："在平面上若两直线同垂直于某一直线，则两直线的距离处处相等。"等原理。在考虑外圆的测量时，要涉及到"圆的两条切线同垂直于一条直线，则圆的两切线平行，且圆的直径等于两平行切线的距离。"以及"过圆的切点的直径或半径必垂直于过这点的切线。"等原理。[②]这些几何原理虽然在古籍中没有明确的记载，但人们通过大量的实践活动，肯定对这些几何理论有了一定程度的认识。

① 刘东瑞. 世界上最早的游标量具——新莽铜卡尺. 中国历史博物馆馆刊，1979（1）

② 白尚恕. 王莽卡尺的构造、用法以及在数理上的分析. 中国历史博物馆馆刊，1981（3）

一般卡尺的卡爪内侧长度的大小与它可测量的外圆直径之间存在着一定的关系。卡尺的卡爪内侧长度与它的最大跨度之间可以有三种关系，即卡爪内侧长度大于、等于或小于其最大跨度的一半。卡爪内侧长度大于最大跨度一半时与等于最大跨度一半时，测量功用是相同的。卡尺可直接测量到的最大外圆直径与卡爪的内侧长度 2 倍相等。当卡爪的内侧长度大于或等于最大跨度的一半时，可测的最大外圆直径等于最大跨度。现存的这一王莽卡尺的内侧长度为最大跨度的一半。由此可以推断当时对于上述一些关系是比较清楚的。这一量具的设计要求，主要是使直接测量到的外圆直径范围达到最大。因卡爪的内侧长度大于最大跨度一半时，其功用与等于最大跨度一半时相同，所以没有必要把卡尺的卡爪内侧做的过长。[①] 当卡爪内侧小于卡尺的最大跨度的一半时，虽然直接测量到的外圆直径范围较小，但利用勾股定理，可间接测量到的外圆直径范围却很大。当时是否制造和使用过这种类型的卡尺进行间接测量外径，现在无法确定，但就当时的数学水平来看，则完全有可能。大约成书在王莽时期的数学名著《九章算术》已专门讨论了类似的计算问题，书中关于“锯圆材问题”的解决，实际上相当于给出了间接测量外圆直径的公式。

从以上所述可以看到秦、汉时期数学在度量衡器具研制中的一些应用情况。在度量衡器具的研制中一般要用到当时比较精确和先进的计算方法。东汉时期，统治者规定当时凡是度量衡研制中涉及到的数学问题都要依据《九章算术》的算法进行计算。可见，古代对有关度量衡的计算要求是很高的。度量衡的发展会给数学提出一些新问题，在度量衡的研制中也可能会发现和提出一些新的数学方法，因此对数学的发展会起到推动作用。在数学书

---

① 白尚恕．王莽卡尺的构造、用法以及在数理上的分析．中国历史博物馆馆刊，1981（3）

的编写中肯定也吸收了一些秦、汉时期在度量衡研制中所取得的数学成果。

第三节　音律学中所应用的数学知识

音律学就是对乐器上乐音的由来及其精确频率进行数学研究的科学，因此，律学与数学有着密切关系。古代律学中的数学内容也应是数学史研究的内容。

我国古代用竹管或弦来定音律，很早就有了乐律计算法。公元前四世纪成书的《管子》记载了最早的定律法，并用来定五声音阶。[①] 当时的定律法被称为“三分损益”法，用现代观点看，就是根据弦或管的长度计算，先以一条空弦的长度为基础，依次乘以$\frac{2}{3}$或$\frac{4}{3}$，即加长三分之一，或缩短三分之一，这就得到不同的长度，由此产生不同的振动频率形成不同的音高。用三分损益法定出的五声音阶为：黄钟宫音的弦长为81，徵音弦长为$81\times\frac{4}{3}=108$，商音弦长为$108\times\frac{2}{3}=72$，羽音弦长为$72\times\frac{4}{3}=96$，角音弦长为$96\times\frac{2}{3}=64$。[②]

秦、汉时期我国的律学有了更大的发展，律学研究也取得了许多新的成就。在律学的研究中也应用了更多的数学知识。

《淮南子》中比较清楚地记载了十二律的推算方法。在《淮南子·天文训》中载有：“凡十二律，黄钟为宫，太蔟为商，姑洗为

---

① 《管子·地员篇》。

② 蔡宾牟、袁运开主编．物理学史讲义——中国古代部分．北京：高等教育出版社，1985．120

角，林钟为徵，南吕为羽。……故黄钟位子，其数八十一，主十一月。下生林钟，林钟之数五十四，主六月。上生太蔟，太蔟之数七十二，主正月。下生南吕，南吕之数四十八，主八月。上生姑洗，姑洗之数六十四，主三月。下生应钟，应钟之数四十二，主十月。上生蕤宾之数五十七，主五月。上生大吕，大吕之数七十六，主十二月。下生夷则，夷则之数五十一，主七月。上生夹钟，夹钟之数六十八，主二月。下生无射，无射之数四十五，主九月。上生仲吕，仲吕之数六十，主四月，极不生。下生者倍以三除之，上生者四以三除之。”

用字母 A，B，C，D，E，F，G，H，I，J，K，L 来表示黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟、蕤宾、大吕、夷则、夹钟、无射、中吕十二律，把上边的计算方法用现代符号表示出来就是：

1. 黄钟 $A=81$

2. 林钟 $B=\frac{2}{3}\times A=\frac{2}{3}\times 81=54$

3. 太簇 $C=\frac{4}{3}\times B=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times 81=\frac{2^3}{3^2}\times 81=72$

4. 南吕 $D=\frac{2}{3}\times C=\frac{2}{3}\times\frac{2^3}{3^2}\times 81=\frac{2^4}{3^3}\times 81=48$

5. 姑洗 $E=\frac{4}{3}\times D=\frac{2^6}{3^4}\times 81=64$

6. 应钟 $F=\frac{2}{3}\times E=\frac{2^7}{3^5}\times 81=42\frac{2}{3}\doteq 42$

7. 蕤宾 $G=\frac{4}{3}\times F=\frac{2^9}{3^6}\times 81=56\frac{8}{9}\doteq 57$

8. 大吕 $H=\frac{4}{3}\times G=\frac{2^{11}}{3^7}\times 81=75\frac{23}{27}\doteq 76$

9. 夷则 $I=\frac{2}{3}\times H=\frac{2^{12}}{3^8}\times 81=50\frac{46}{81}\doteq 51$

10. 夹钟 $J=\frac{4}{3}\times I=\frac{2^{14}}{3^9}\times 81=67\frac{103}{243}\doteq 68$

11. 无射 $K=\frac{2}{3}\times J=\frac{2^{15}}{3^{10}}\times 81=44\frac{692}{729}\doteq 45$

12. 仲吕 $L=\frac{4}{3}\times K=\frac{2^{17}}{3^{11}}\times 81=59\frac{2039}{2187}\doteq 60$

在上面的十二律计算中，已经涉及到了很复杂的分数运算。在十二律的推算中实际上还涉及到了指数概念和比例运算。《淮南子·天文训》在给出上面的十二律数之前讲了这样几句话："以三参物，三三如九，故黄钟之率九寸而宫音调。因而九之，九九八十一，故黄钟之数立焉。……十二各以三成，故置一而'十一'三之，为积十七万七千一百四十七，黄钟大数立焉。"这里"九之"是指以九相乘。"十二各以三成"是指十二律是由三分损益的原则得到的。"置一而'十一'三之"是指以一乘十一次三，即 1×3^{11}。这段话给出了等式 $1\times 3^{11}=177\ 147$，已经用到了初步的指数概念。

上面给出的黄钟大数，在计算时是有实际意义的。用三分损益法可以求出其余十一律的大数。黄钟大数取为 3^{11} 可以使其余十一律的大数都为整数。用三分损益法推算到应钟后，要出现分数，取整后只能得到近似数。如果后面的律数按得到的近似数来计算将产生很大的误差。如果在得知各律大数的情况下，可以用比例算法求出各律的大小。这样，可以避免产生大的误差。因已知仲吕大数为 $2^{17}=131\ 072$，则有 $L:A=131\ 072:177\ 147$，可求得 $L=59.93$ 取整后为 60。

《淮南子》计算律数时，都取整数。在收零作整时，需要用到比较科学的方法。从前边的计算中我们可以发现，蕤宾 $56\frac{8}{9}$ 被进作 57；大吕 $75\frac{23}{27}$ 被进作 76；夷则 $50\frac{46}{81}$ 被进作 51；无射 $44\frac{692}{729}$ 被进作 45；仲吕 $59\frac{2039}{2187}$ 被进作 60，都是符合四舍五入的截取原则的。只是应钟 $42\frac{2}{3}$ 取作 42，夹钟 $67\frac{103}{243}$ 取作 68，似与四舍五入

原则不符。但如应钟取42，则只能上升蕤宾56，而不能是57。夹钟取作68，却可由夷则进作51而推得。《宋书·律历志》引这一段时，应钟和夹钟分别为43和67。因此，《淮南子》的现传本也许有误。[①]《淮南子》中这两个数的取整也可能有其他方面的考虑，也许是想和以前的律制尺可能保持一致。[②]在当时的定律计算中，可能已经应用了四舍五入的方法。

在《史记》和《汉书》中，也讨论了定律方法和具体的律长。两书所载的方法是一致的。《史记·律书》载有："黄钟长八寸十分一，宫。大吕长七寸五分三分二，太蔟长七寸十分二，商。夹钟长六寸七分三分一，姑洗六寸十分四，角。仲吕长五寸九分三分二，蕤宾长五寸六分三分二，林钟长五寸十分四，徵。夷则长五寸三分二，南吕长四寸十分八，羽。无射长四寸四分三分二。应钟长四寸二分三分二。"

这段话所记载的结果与《淮南子》的结果基本是一致的。不同的只是，《淮南子》都用整数表示结果，把分数收了上去。《史记》则把所得到的不是整数的值，进行了近似简化。如蕤宾为$56\frac{8}{9}$寸，简化得$56\frac{2}{3}$寸；大吕为$75\frac{23}{27}$寸，简化为$75\frac{2}{3}$寸；夷则为$50\frac{46}{81}$寸，简化为$50\frac{2}{3}$寸；夹钟为$67\frac{103}{243}$寸，简化为$67\frac{1}{3}$寸；无射为$44\frac{692}{729}$寸，简化为$44\frac{2}{3}$寸；仲吕为$59\frac{2039}{2187}$寸，简化为$59\frac{2}{3}$寸。这里，所用的原则是：如果分数部分大于$\frac{1}{2}$，则化为$\frac{2}{3}$。如果分数

---

① 钱宝琮先生认为《宋书·律历志》所引的数据是正确的，而流传本《淮南子》把应钟四十三误作"四十二"，把夹钟六十七误作"六十八"。见：钱宝琮. 中国数学史话. 北京：中国青年出版社，1957. 95

② 吴南薰. 律学会通. 北京：科学出版社，1964. 101

部分小于$\frac{1}{2}$，则化为$\frac{1}{3}$。这样处理比《淮南子》四舍五入的化整方法要更精确一些。

这段话中，林钟长为5寸4分，被记作“五寸十分四”；太簇7寸2分，被记作“七寸十分二”；南吕4寸8分，被记作“四寸十分八”；姑洗6寸4分，被记作“六寸十分四”。这里是用十进位分数来表示寸下面的数，而没用名数，实际上与用现在十进位小数记法接近。

《史记》和《汉书》都记载了上下相间生律法，与上边《史记》所载的律长数据是不一致的。其方法是：“以下生者，倍其实，三其法。以上生者，四其实，三其法。”[1] 用这种方法计算到的值是有一定规律性的（见下表）。

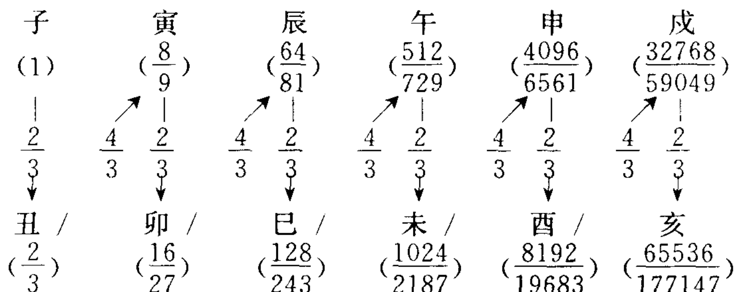
上（阳）	黄钟 (81)	太簇 (72)	姑洗 (64)	蕤宾 $(56\frac{8}{9})$	夷则 $(58\frac{46}{81})$	无射 $(44\frac{692}{729})$
下（阴）	林钟 (54)	南吕 (48)	应钟 $(42\frac{2}{3})$	大吕 $(37\frac{25}{27})$	夹钟 $(33\frac{173}{243})$	仲吕 $(29\frac{2113}{2187})$

在上表中，上生得到的数与下生得到的数分别形成了等比数列，其中，每后一项与前一项的比都为$\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$。

《史记·律书》所载的“生钟分”的方法就是由上下相间法来求其数值的。书中说：“生钟分：子一分。丑三分二。寅九分八。卯二十七分十六。辰八十一分六十四。巳二百四十三分一百二十八。午七百二十九分五百一十二。未二千一百八十七分一千二十四。申六千五百六十一分四千九十六。酉一万九千六百八十三分八千一百九十二。戌五万九千四十九分三万二千七百六十八。亥

① 《史记·律书》

十七万七千一百四十七分六万五千五百三十六。"从这段记载可得到下面的图表：



用上下相间法来确定律长时，所定出的大吕、夹钟、中吕三律，还要乘以 2 才能满足音乐上的要求，与前面所得到的结果相一致。

三分损益法生律 11 次后（即到第十二律后），不能回到出发的律上，使十二律不能周而复始。中国历代有许多律学研究者研究过这一问题的解决办法。汉代的京房（公元前 77～前 37 年）在这方面做了重要的工作。他提出了"六十律"律制。他所用的方法是："以上生下，皆三生二，以下生上，皆三生四。阳下生阴，阴上生阳，终于中吕，而十二律毕矣。中吕上生执始，执始下生去灭，上下相生，六十律毕矣。[①] 也就是依照三分损益法，从黄钟起生到中吕，接着再生下去，得"执始"、"去灭"等律，直到六十律为止。实际上，用这种方法生到 54 律时，已与出发律极为相近。

京房的"六十律"采用的定律法也是三分损益法，但在具体的数学计算处理上，比以前的十二律算法有了新的改进。六十律的推算方法在《后汉书·律历志》中有详细的记载："黄钟，律吕之首，而生十一律也。其相生也，皆三分而损益之。是故十二律

① 《后汉书·律历志》。

之，得十七万七千一百四十七，是为黄钟之实。又以二乘而三约之，是为下生林钟之实，又以四乘而三约之，是为上生太蔟之实。推此上下，以定六十律之实。以九三之，得万九千六百八十三为法，於律为寸，於准为尺。不盈者十之，所得为分。又不盈十之，所得为小分，以其余正其强弱。”

根据上面的记载，我们可以了解到具体的计算方法。京房首先确定了黄钟之实的大小，黄钟之实与《淮南子》中所说的黄钟大数是相等的。然后根据三分损益的原则来确定其他 59 律的实。因黄钟之实为 $3^{11}=177\ 147$，则有：

$$\text{林钟之实}=\frac{2}{3}\times 3^{11}=2\times 3^{10}=118\ 098$$

$$\text{太蔟之实}=\frac{4}{3}\times 2\times 3^{10}=8\times 3^{9}=157\ 464$$

推算下去可以得到后面 57 律的实。求得各律之实后就比较容易计算律长的大小。设 x_i 为某一律的律长，X_i 为这一律的实，又黄钟律长 $a=9$，黄钟之实 $A_0=3^{11}=177\ 147$，可以得到比例式：

$$\frac{x_i}{a}=\frac{X_i}{A_0},\qquad \text{得}\quad x_i=\frac{X_i}{\dfrac{A_0}{a}}。$$

$$\text{令}\quad \frac{A_0}{a}=A',\qquad \text{则有}\quad x_i=\frac{X_i}{A'}。$$

其中 $A'=\frac{3^{11}}{9}=3^{9}=19\ 683$，这一值被看做“法”，是指除数，$X_i$ 被看做“实”，是指被除数。京房给出了求律长的统一公式。

《后汉书·律历志》不但记载了计算方法，而且还给出了六十律的全部计算结果。我们这里只推算其中的十二律之长，来验证其结果。

$$\text{林钟}\ x_1=\frac{X_1}{A'}=\frac{2\times 3^{10}}{3^{9}}=6\ （\text{寸}）$$

$$\text{太蔟}\ x_2=\frac{X_2}{A'}=\frac{8\times 3^{9}}{3^{9}}=8\ （\text{寸}）$$

这两个值书中记作“律六寸”和“律八寸”。

南吕 $x_3=\frac{X_3}{A'}=\frac{104976}{19683}\doteq 5.33333$（寸）

这一值书中记作“律五寸三分，小分三强”。

姑洗 $x_4=\frac{X_4}{A'}=\frac{139968}{19683}\doteq 7.11111$（寸）

这一值书中记作“律七寸一分，小分一微强。”

应钟 $x_5=\frac{X_5}{A'}=\frac{93312}{19683}\doteq 4.74074$（寸）

这一值书中记作“律四寸七分，小分四微强。”

蕤宾 $x_6=\frac{X_6}{A'}=\frac{124416}{19683}\doteq 6.32098$（寸）

这一值书中记作“律六寸三分，小分二微强。”

大吕 $x_7=\frac{X_7}{A'}=\frac{165888}{19683}\doteq 8.42798$（寸）

这一值书中记为“律八寸四分，小分三弱”。

夷则 $x_8=\frac{X_8}{A'}=\frac{110592}{19683}\doteq 5.61865$（寸）

这一值书中记为“律五寸六分，小分二弱。”

夹钟 $x_9=\frac{X_9}{A'}=\frac{147456}{19683}\doteq 7.49154$（寸）

这一值书中记作“律七寸四分，小分九强。”

无射 $x_{10}=\frac{X_{10}}{A'}=\frac{98304}{19683}\doteq 4.99436$（寸）

这一值书中记作“律四寸九分，小分九（少）强。”[①]

中吕 $x_{11}=\frac{X_{11}}{A'}=\frac{131072}{19683}\doteq 6.65914$（寸）

这一值书中记作“律六寸六分，小分六微弱。”

---

① 甄鸾《五经算术》引用了《续汉书·律历志》中的这一数值，钱宝琮校点时依卢文弨补一“少”字。

执始 $x_{12}=\frac{X_{12}}{A'}=\frac{174762}{19683}\doteq 8.87882$（寸）

这一值书中记作“律八寸八分，小分七大（太）强。”[1]

在六十律的推算中，京房采用了先求各律之实然后再定各律管长的方法，这是比较合理的。如果由黄钟管长 9 寸直接按三分损益法去生其他 59 律管长，则计算更为复杂。如计算过程中取前面的近似结果进行推算，还会引起累积性误差，使计算的精确度大为降低。

六十律计算结果的表示方法很值得研究。“律为寸”，“不盈者十之，所得为分。又不盈十之，所得为小分。以其余正其强弱。”这里所用的表示方法与现在的十进位小数记法已比较接近。分下面的单位当时一般称为“厘”，但这里用小分来表示，并没有用“厘”这一名数。对于小分之后的奇零部分，采用了比较特殊的表示方法。对小分之下所余的部分，视其大小分别用“微强”、“强”、“少强”、“半强”、“大强”来表示大小。当小分后面所余部分值较大时，也可进一位到小分，然后将“弱”或“微弱”写在后面。下面对各种情况分别举例说明。

（1）《后汉书·律历志》给出的色育值为：“律，八寸九分小分八微强。”

我们推算其结果为 $\frac{176776}{19683}=8.98115$

（2）少出之值为：“律，八寸小分九强。”

推算出的结果为 $\frac{159280}{19683}=8.09223$

（3）未育之值为：“律，四寸六分小分一少强。”

推算结果为 $\frac{90817}{19683}=4.61398$

---

[1] 《五经算术》中大字处为“太”字。

（4）变虞之值为："律，七寸小分1半强。"

推算结果为$\frac{138084}{19683}=7.01539$

（5）去南之值为："律，五寸四分小分六大强。"

推算结果为$\frac{107635}{19683}=5.46842$

（6）形晋之值为："律，七寸五分小分八弱。"

推算结果为$\frac{149156}{19683}=7.57791$

（7）丙盛之值为："律，八寸七分小分六微弱。"

推算结果为$\frac{172410}{19683}=8.75936$

六十律小分之下奇零部分的表示是有一定规则的。虽然"微强"、"强"、"少强"、"半强"、"大强"都是表示小分之下多余部分值的大小的，但所代表的值的大小是不同的。"大强"表示的值最大，其次是"半强"，再次是"少强"，而"微强"则最小。通过计算和分析六十律的所有值可以看到，"微强"表示的值都不超过一小分的$\frac{1}{8}$，"少强"表示的值在一小分的$\frac{1}{3}$至$\frac{1}{2}$之间，"半强"所表示的值都在一小分的$\frac{1}{2}$以上$\frac{2}{3}$以下，"大强"表示的值在一小分的$\frac{2}{3}$以上。原则上，小分后面有多余值不列出时便可在后面写"强"，如将小分后面的多余值进一位到小分便可在后面写上"弱"。一般情况下，"强"表示的值在"微强"和"少强"之间。"弱"和"微强"是与"强"和"微强"相对应的，"强"、"微强"是表示小分后面的多余值，"弱"和"微弱"则表示小分之下的不足值。

从以上所述可以看到，秦汉时期的律学应用到不少数学知识，在律学中也包含了许多重要的数学内容。